ELEMENTA SECTIONUM CONICARUM CONSCRIPTA AD USUM...

Digitized by Google

FONDO PIZZOFALCONE

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio XXX

Palchetto 6

Num.° d' ordine 16

21193

5-E-27

R. BIBLIOTECA NAZIONALE VITT. EM. III
B. Prov.
I
546
NAPOLI

Digitized by Google

B. P
I
546

Digitized by Google

Digitized by Google

606773
SBN

ELEMENTA SECTIONUM CONICARUM

Conſcripta ad uſum

FAUSTINÆ PIGNATELLI

Principis Colubranenſis, & Tolvenſis Ducatus Hæredis

Edita vero in gratiam

STUDIOSÆ JUVENTUTIS

AUCTORE

NICOLAO DE MARTINO

Regio Mathematatum Profeſſore

TOM. II.

OFFICIO TOPOGRAFICO

Officio Topografico

Excudebat FELIX MOSCA ſumptibus CAJETANI ELIÆ Superioribus annuentibus NEAPOLI
MDCCXXXIV.

BIBLIOTECA NAZIONALE DI NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

LIBER V.

De Tangentibus, & Secantibus Sectionum Conicarum.

DOctrina diametrorum, quibus pollent conicæ ſectiones, ad exitum perducta; ſequitur modo, ut eam aggrediamur, quæ reſpicit tangentes, & ſecantes earundem curvarum. Et tangentem quidem conicæ ſectionis eam vocamus rectam lineam, quæ conicæ ſectioni ſubinde occurrit, ut producta tota cadat extra eam. Per contrarium vero ſecantem appellamus illam, quæ, quum producitur, cadit intra conicam ſectionem. Quæ igitur proprietates competant rectis iſtis, hoc libro breviter oſtendemus.

Biblioteca Nazionale di Napoli

C A P. I.

Proprietates, quæ ellipſis tangentibus competunt, oſtenduntur.

I. CIrca tangentes ellipſis, jam illud ſuperius oſtenſum eſt, quod *ſi ex vertice alicujus diametri recta linea ducatur,* I. *Proprietates duæ principales, quæ ellipſi tan-*

 or-

Digitized by Google

genti compe-tunt. *ordinatis ejus parallela, ea tangat ellipſim in ſolo illo vertice*. Nunc autem ſubjungemus, quod *in locum, tangente, & ellipſi contentum, nulla alia cadat recta linea.*

Fig. I.

Sit enim ellipſis AMB, cujus AB ſit diameter aliqua, AD parameter ejus, & DAH recta, ordinatis ejuſdem diametri parallela. Dico, quod ſicuti recta DAH contingit ellipſim in ſolo vertice A, ita in locum, contentum tangente, & eadem ellipſi, nulla alia recta linea duci poſſit ex eodem vertice A.

Si fieri poteſt, ducatur recta alia AI, in qua ſumpto puncto quovis P, agatur per illud recta PN, ipſi DH parallela, conveniens cum recta BD in puncto O. Et quoniam, propter ellipſim, MN quadratum eſt æquale rectangulo ANO; erit PN quadratum majus illo rectangulo. Quare, ſi extendatur NO uſque in S, ita ut PN quadratum ſit æquale rectangulo ANS, & jungatur AS; hæc ſecabit rectam BD in puncto aliquo Q.

Ducatur ergo per punctum iſtud Q recta QI, eidem AH parallela. Et quoniam PN quadratum eſt æquale rectangulo ANS; erit, ut PN quadratum ad AN quadratum, ita rectangulum ANS ad idem AN quadratum; ſive etiam, ita NS ad AN. Sed PN quadratum eſt ad AN quadratum, ut IK quadratum ad AK quadratum. Et NS eſt ad AN, ut KQ ad AK; ſive etiam, ut rectangulum AKQ ad AK quadratum; ſive demum, ut LK quadratum ad AK quadratum. Quare erit IK quadratum æquale quadrato, quod ſit ex LK. Quod fieri non poteſt.

II. Quæ-

Digitized by Google

II. Quælibet ergo recta linea, quæ ex puncto contactus ducitur infra tangentem, neceſſe eſt, ut primo ſecet ellipſim, tum cadat in locum, tangente, & ellipſi contentum. Hinc autem duo conſequuntur, quæ aditum nobis aperient ad oſtendendas proprietates omnes, quæ ellipſis tangentibus competunt. II. *Corollaria, quæ ex duabus præcedentibus proprietatibus conſequuntur.*

Primum eſt, quod *ad unum, idemque punctum ellipſis nonniſi unica tangens duci poſſit*. Nam, ſi duci poſſent tangentes duæ; jam una caderet in locum, ellipſi, & tangente altera comprehenſum. Quod quidem oſtenſum eſt fieri non poſſe.

Alterum eſt, quod *ſi recta linea contingat ellipſim in puncto aliquo, ea debeat eſſe parallela ordinatis illius diametri, quæ pertinet ad illud punctum*. Nam aliter, ducta ex eo puncto recta alia, ordinatis iis parallela, foret iſta quoque tangens ellipſis; atque adeo ad unum, idemque punctum ellipſis duæ tangentes duci poſſent. Quod fieri nequit.

III. His jactis principiis, facile modo erit, *eas primum tangentis proprietates oſtendere, quæ ei competunt, ubi alicui diametro occurrit*. Tangens igitur ET, ducta ad punctum E, verticem diametri EF, conveniat cum diametro altera AB in puncto T. Et ducatur, tam ad diametrum AB ordinata EG, quam ad diametrum EF ordinata AO. III. *Proprietates, quæ pertinent ad tangentem ellipſis, alicui diametro occurrentem.* FIG. 2.

Primo itaque erit, ut CT ad CA, ita CA ad CG. Nam, ex ſuperius oſtenſis, BG eſt ad AG, ut FO ad EO; & componendo, AB eſt ad AG, ut EF ad EO; & capiendo antecedentium dimidia, CA eſt ad AG, ut CE ad

EO; & convertendo, CA eſt ad CG, ut CE ad CO. Sed, propter parallelas AO, ET, ut eſt CE ad CO, ita eſt CT ad CA. Quare erit ex æquali, ut CT ad CA, ita CA ad CG.

Secundo erit, rectangulum AGB æquale rectangulo CGT: adeo, ut AG erit ad CG, ut eſt TG ad BG. Quum enim CT ſit ad CA, ut eſt CA ad CG; erit CA quadratum æquale rectangulo TCG. Sed CA quadratum eſt æquale rectangulo AGB una cum CG quadrato. Et rectangulum TCG eſt æquale rectangulo CGT una cum eodem CG quadrato. Quare, dempto communi quadrato ex CG, remanebit rectangulum AGB æquale rectangulo CGT.

Tertio, ſi AD ſit parameter ipſius diametri AB, erit, ut EG quadratum ad rectangulum CGT, ita parameter AD ad diametrum AB. Jam enim, propter ellipſim, in hac ratione eſt EG quadratum ad rectangulum AGB. Sed rectangulum AGB oſtenſum eſt æquale rectangulo CGT. Quare in eadem pariter ratione erit quadratum ordinatæ EG ad rectangulum aliud CGT.

Denique erit rectangulum ATB æquale rectangulo CTG: adeo, ut erit AT ad GT, ut eſt CT ad BT. Nam idem CT quadratum eſt æquale, tam duobus rectangulis CTG, TCG, quam rectangulo ATB una cum CA quadrato. Quare duo rectangula CTG, TCG æqualia erunt rectangulo ATB una cum CA quadrato. Sed, ob rectas continue proportionales CT, CA, CG, quadratum ex CA eſt æquale rectangulo TCG. Quare etiam rectangulum

Digitized by Google

ATB æquale erit rectangulo CTG.

IV. *Præcedentium proprietatum converſæ demonſtrantur.* Fig. 2.

IV. Sed facile quoque erit, *converſas harum proprietatum oſtendere*. Nimirum primo, quod recta ET ſit tangens ellipſis, ſi utique CT ſit ad CA, ut eſt CA ad CG. Nam, ex ſuperius oſtenſis, BG eſt ad AG, ut FO ad EO; & componendo, AB eſt ad AG, ut EF ad EO; & capiendo antecedentium dimidia, CA eſt ad AG, ut CE ad EO; & convertendo, CA eſt ad CG, ut CE ad CO. Sed, ex hypotheſi, CA eſt ad CG, ut CT ad CA. Quare erit ex æquali, ut CT ad CA, ita CE ad CO: & propterea recta ET, velut ipſi AO parallela, tangens erit ellipſis.

Secundo, quod recta ET tangat ellipſim in puncto E, ſi fuerit rectangulum AGB æquale rectangulo CGT; atque adeo, ut AG ad CG, ita TG ad BG. Nam, ſemper ac rectangulum AGB eſt æquale rectangulo CGT; addito communi quadrato ex CG, erit quoque CA quadratum æquale rectangulo TCG: proindeque erit, ut CT ad CA, ita CA ad CG; & conſequenter ET tangens erit ellipſis.

Tertio, quod recta ET contingat ellipſim in puncto E, ſi fuerit, ut parameter AD ad diametrum AB, ita quadratum ordinatæ EG ad rectangulum CGT. Jam enim quadratum ordinatæ EG eſt ad rectangulum AGB in illa ratione. Quare, ſemper ac idem quadratum ſupponitur habere eandem rationem ad rectangulum CGT; erit rectangulum AGB æquale rectangulo CGT: proindeque recta ET tangens erit ellipſis.

Denique, quod recta ET ſit tangens el-

lipſis, ſi fuerit rectangulum ATB æquale rectangulo CTG; & conſequenter, ut AT ad GT, ita CT ad BT. Nam, quum idem CT quadratum ſit æquale, tam duobus rectangulis CTG, TCG, quam rectangulo ATB una cum CA quadrato; erunt duo rectangula CTG, TCG æqualia rectangulo ATB una cum CA quadrato. Unde, ſemper ac ponitur rectangulum ATB æquale rectangulo CTG; erit quoque CA quadratum æquale rectangulo TCG: & propterea, quum ſit, ut CT ad CA, ita CA ad CG; erit recta ET tangens ellipſis.

V. *Tangentium ſibi mutuo occurrentium proprietas prima.* FIG. 2.

V. Nunc *eas quidem proprietates oſtendemus, quæ tangentibus ellipſis ſibi mutuo occurrentibus, competunt*. Hunc in finem ad duo quælibet ellipſis puncta A, & E ducantur tangentes duæ AX, EX, quæ ſibi mutuo occurrant in X. Extendantur eædem uſque donec conveniant cum diametris AB, EF in punctis L, & T. Et erit, primo, ut AX ad LX, ita EX ad TX.

Ducantur enim ad diametros AB, EF ordinatæ EG, AO. Et, per ſuperius oſtenſa, erit, ut CG ad CA, ita CO ad CE. Sed, propter tangentem ET, CG eſt ad CA, ut eſt CA ad CT. Itemque, propter tangentem AL, CO eſt ad CE, ut eſt CE ad CL. Quare erit ex æquali, ut CA ad CT, ita CE ad CL: & propterea, quum duo triangula ACL, ECT habeant circa angulum communem C latera reciproce proportionalia, erit triangulum ACL æquale triangulo ECT.

Hinc, dempto communi trapetio ACEX erit,

erit quoque triangulum ELX æquale triangulo ATX. Unde, quum duo iſta triangula habeant angulum EXL æqualem angulo AXT; habebunt quoque latera circum æquales iſtos angulos reciproce proportionalia; proindeque erit, ut AX ad LX, ita EX ad TX; hoc eſt tangentes duæ AL, ET in eadem ratione ſeſe mutuo ſecabunt in puncto X, in quo ſibi invicem occurrunt.

VI. Hinc autem *ſequitur ſecundo*, tangentes duas AX, EX eandem cum ordinatis EG, AO rationem habere; adeoque eſſe, ut AX ad EX, ita EG ad AO. VI. *Secunda proprietas tangentium ſibi invicem occurrentium.*

Eſt enim, ex ſuperius oſtenſis, ut CO ad CE, ita CG ad CA. Sed, propter triangula æquiangula COA, CET, CO eſt ad CE, ut AO ad ET. Pariterque, ob triangula æquiangula CGE, CAL, CG eſt ad CA, ut EG ad AL. Quare erit ex æquali, ut EG ad AL, ita AO ad ET; & permutando erit etiam, ut EG ad AO, ita AL ad ET. FIG. 2.

Quia autem oſtenſum eſt, AX eſſe ad LX, ut eſt EX ad TX; addendo antecedentes conſequentibus, erit quoque, ut AX ad AL, ita EX ad ET; & permutando erit pariter, ut AX ad EX, ita AL ad ET. Unde, quum in eadem ratione rectarum AL, ET ſit, tam AX ad EX, quam EG ad AO; erit ex æquali, ut AX ad EX, ita EG ad AO.

VII. Atque hinc modo *ſequitur ulterius*, eaſdem tangentes AX, EX eandem rationem habere cum conjugatis diametrorum AB, EF, quæ pertinent ad puncta contactus A, & E. VII. *Tertia proprietas tangentium, quæ inter ſe mutuo conveniunt.*

Nam, per ſuperius oſtenſa, ordinatæ FIG. 2.

EG,

EG, AO ſunt, ut conjugatæ diametrorum AB, EF. Sed tangentes AX, EX ſunt inter ſe, ut ordinatæ EG, AO. Quare erit ex æquali, ut AX ad EX, ita conjugata diametri AB ad conjugatam diametri EF.

Quemadmodum autem tangentes AX, EX ſunt, ut conjugatæ diametrorum AB, EF; ita quadrata tangentium AX, EX erunt, ut quadrata earundem conjugatarum; atque adeo, ut figuræ ipſarum diametrorum AB, EF, quibus ſuarum conjugatarum quadrata ſunt æqualia.

Unde modo, ſicuti figuræ diametrorum AB, EF rationem habent compoſitam ex ipſis diametris, & parametris earundem; ita quoque quadratum tangentis AX ad quadratum tangentis EX rationem habebit compoſitam ex diametro AB ad diametrum EF, & ex parametro diametri AB ad parametrum diametri EF.

VIII. *Quarta proprietas tangentium, quæ ſibi invicem occurrunt.* FIG. 2.

VIII. Pertinet huc quoque *hæc alia proprietas*, quod ſi AX, EX ſint duæ tangentes ellipſis, & ducta ex puncto contactus A diametro AB, agatur per aliud contactus punctum E recta BE, conveniens cum tangente AX in puncto I; quod, inquam, AI ſit dupla ipſius AX.

Protrahatur enim tangens EX, uſque donec conveniat cum diametro AB in puncto T. Tum ducatur ad eandem diametrum ordinata EG. Et quoniam, propter tangentem ET, ut eſt BT ad CT, ita eſt GT ad AT; erit permutando, ut BT ad GT, ita CT ad AT. Sed, dividendo, BG eſt ad GT, ut CA ad

AT.

AT. Quare erit rurſus permutando, ut BG ad CA, ita GT ad AT.

Jam AI ad AX rationem habet compoſitam ex AI ad EG, & ex EG ad AX. Sed, ob triangula æquiangula BAI, BGE, AI eſt ad EG, ut AB ad BG. Itemque, ob triangula æquiangula TGE, TAX, EG eſt ad AX, ut GT ad AT, ſive etiam, ut BG ad CA. Quare AI ad AX rationem habebit compoſitam ex AB ad BG, & ex BG ad CA.

Patet autem, duas iſtas rationes componere pariter rationem, quam habet AB ad CA. Quare erit ex æquali, ut AI ad AX, ita AB ad CA; proindeque, ſicuti AB dupla eſt ipſius CA; ita etiam AI dupla erit ipſius AX.

IX. Sed facile eſt etiam *converſam hujus oſtendere*: nimirum, quod ſi AI ſit dupla ipſius AX, & AX ſit tangens ellipſis; etiam EX contingere debeat ellipſim in puncto E. IX. *Præcedentis proprietatis converſa demonſtratur.* FIG. 2.

Quemadmodum enim AI dupla ponitur ipſius AX, ita AB dupla eſt ipſius CA. Quare erit, ut AB ad CA, ita AI ad AX. Sed AI ad AX rationem habet compoſitam ex AI ad EG, & ex EG ad AX; ſive etiam ex AB ad BG, & ex GT ad AT. Itaque AB ad CA habebit pariter rationem compoſitam ex AB ad BG, & ex GT ad AT.

Jam AB ad CA habet quoque rationem compoſitam ex AB ad BG, & ex BG ad CA. Quare erit, ut BG ad CA, ita GT ad AT; & permutando, ut BG ad GT, ita CA ad AT. Sed componendo BT eſt ad GT, ut CT ad AT. Itaque rurſus permutando erit, ut BT ad CT, ita GT ad AT: & propterea, ex ſuperius

rius

rius oſtenſis, recta ET tangens erit ellipſis.

X. *Quinta proprietas tangentium ſibi mutuo occurrentium.* FIG. 3.

X. Præterea, *ut alias tangentium ellipſis proprietates proſequamur*, ſint adhuc AX, EX duæ tangentes ellipſis. Et, ducta diametro AB, ſit BZ tangens tertia, quæ conveniat cum EX in puncto Z. Sitque demum KL conjugata ipſius AB. Dico, rectangulum ex AX in BZ æquale eſſe quadrato, quod fit ex CK.

Conveniat namque tangens EX cum diametro AB in puncto T, & cum ejus conjugata KL in puncto V. Ducaturque ex puncto contactus E, tum recta EG ordinata ad diametrum AB, cum recta EH ordinata ad diametrum KL.

Quia igitur ET eſt tangens ellipſis; erit, ut BT ad CT, ita GT ad AT. Sed, propter triangula æquiangula TBZ, TCV, BT eſt ad CT, ut BZ ad CV. Itemque, propter triangula æquiangula TGE, TAX, GT eſt ad AT, ut EG, ſive CH ad AX. Quare erit ex æquali, ut BZ ad CV, ita CH ad AX: & propterea rectangulum ex AX in BZ æquale erit rectangulo HCV.

Et quoniam eadem tangens ET occurrit quoque alteri diametro KL in puncto V; erit, ex ſuperius oſtenſis, ut CH ad CK, ita CK ad CV. Quare rectangulum HCV æquale erit quadrato ex CK. Sed rectangulo HCV oſtenſum eſt æquale rectangulum ex AX in BZ: Igitur erit rectangulum ex AX in BZ æquale quadrato, quod fit ex CK.

XI. *Theorema de rectangulo ſub portionibus tan-*

XI. Ulterius, quemadmodum AB, KL ſunt duæ ellipſis conjugatæ diametri, ita ſint MR, PS binæ aliæ diametri ſimiliter conju-

ga-

gatæ, quæ conveniant cum tangente AX in punctis X, & Y. Et *nullo item negotio oſtendemus*, quod eidem CK quadrato æquale ſit etiam rectangulum ex AX in AY. *gentis, per duas conjugatas abſciſſas.* FIG. 4.

Ductis ſiquidem, tum ordinatis MN, PQ ad diametrum AB, cum ordinatis AO, AI, ad diametros MR, PS; erit rectangulum ex MN in PQ ad CK quadratum in ratione compoſita ex MN ad CK, & ex PQ ad CK. Sed, per ea, quæ ſuperius oſtenſa ſunt, MN eſt ad CK, ut AO, ſeu CI ad CP. Itemque PQ eſt ad CK, ut AI, ſeu CO ad CM. Itaque rectangulum ex MN in PQ ad CK quadratum rationem habebit compoſitam ex CI ad CP, & ex CO ad CM.

Jam, propter tangentem AY, diametro PS occurrentem in Y, CI eſt ad CP, ut CP ad CY; ſive etiam, ut PQ ad AY. Pariterque, ob tangentem AX, diametro MR occurrentem in X, CO eſt ad CM, ut CM ad CX; ſive etiam, ut MN ad AX. Quare rectangulum ex MN in PQ ad CK quadratum habebit quoque rationem compoſitam ex PQ ad AY, & ex MN ad AX.

Quoniam autem duæ iſtæ rationes componunt pariter rationem, quam habet rectangulum ex MN in PQ ad rectangulum ex AX in AY; erit ex æquali, ut rectangulum ex MN in PQ ad rectangulum ex AX in AY, ita idem rectangulum ex MN in PQ ad CK quadratum: & propterea rectangulum ex AX in AY æquale erit quadrato, quod fit ex CK.

XII. Sed *converſum hujus theorematis* XII. *Quod præ-*

faci-

cedentis theorematis converſum ſit pariter verum. FIG. 4.

facile quoque erit oſtendere. Nimirum, quod ſi AB, KL ſint duæ ellipſis diametri conjugatæ, & rectangulum XAY, contentum ſub portionibus tangentis XY, æquale ſit quadrato, quod ſit ex CK; aliæ binæ diametri MR, PS ſint etiam conjugatæ.

Si enim PS non ſit conjugata ipſius MR, ſit ejus conjugata diameter alia TV, quæ occurrat tangenti XY in puncto W. Et quoniam MR, TV ſunt duæ ellipſis conjugatæ diametri, quæ conveniunt cum tangente XY in punctis X, & W; erit rectangulum ex AX in AW æquale quadrato, quod ſit ex CK.

Quia autem eidem CK quadrato poſitum eſt æquale rectangulum ex AX in AY; erit rectangulum ex AX in AW æquale rectangulo ex AX in AY: proindeque portiones duæ AW, AY æquales erunt inter ſe. Quod quum fieri nequeat, conſequens eſt, ut PS ſit conjugata ipſius MR.

XIII. *Theorema pro determinatione diametrorum conjugatarum ellipſis.* FIG. 3.

XIII. Atque hinc modo *colligi ulterius poteſt*, quod, ſi ex extremitatibus diametri AB, ducantur tangentes duæ AX, BZ, convenientes cum tangente tertia ET in punctis X, & Z, junganturque rectæ CX, CZ; iſtæ, ad ellipſim uſque productæ, exhibebunt nobis binas ejus diametros conjugatas.

Si enim CZ producatur, uſque donec conveniat cum tangente AX in puncto Y; ob triangula æquiangula CBZ, CAY, erit, ut CB ad BZ, ita CA ad AY. Unde, quemadmodum æquales ſunt duæ CB, CA; ita æquales erunt pariter duæ BZ, AY: proindeque rectangulum ex AX in BZ æquale erit re-

rectangulo ex AX in AY.

Quum autem oſtenſum ſit rectangulum ex AX in BZ æquale quadrato ex CK; erit eidem CK quadrato æquale pariter rectangulum ex AX in AY. Unde, quum duæ diametri MR, PS abſcindant ex tangente XY portiones duas AX, AY, quæ rectangulum continent, æquale quadrato, quod ſit ex CK: per ea, quæ modo oſtenſa ſunt, omnino neceſſe eſt, ut MR, PS ſint duæ ellipſis conjugatæ diametri.

XIV. Cæterum *nolim hic ſilentio prætervire*, quod ſi AB ſit axis ellipſis, AD parameter ejus, & ET aliqua tangens; ducanturque ex puncto contactus E rectæ duæ EG, EH, una perpendicularis ad axem, & altera perpendicularis ad tangentem; quod, inquam, AB ſit ad AD, ut eſt CG ad GH.

XIV. *Tangentis cum axe convenientis proprietas ſpecialis.*
FIG. 2.

Si enim tangens ET conveniat cum axe AB in puncto T; erit, ex ſuperius oſtenſis, ut AB ad AD, ita rectangulum CGT ad EG quadratum. Sed, ob triangulum TEH, rectangulum in E, quadratum ex EG eſt æquale rectangulo HGT. Quare erit quoque, ut AB ad AD, ita rectangulum CGT ad rectangulum HGT: & propterea, quia duo iſta rectangula ſunt inter ſe, ut CG ad GH; erit, ex æquali, ut AB ad AD, ita CG ad GH.

Hinc, ſi AB ſit axis major ellipſis, quemadmodum AB major eſt, quam AD; ita erit CG major, quam GH: proindeque punctum H cadet ſemper inter punctum G, & centrum ellipſis. Viciſſim autem, ſi AB ſit axis minor ellipſis, quemadmodum AB

mi-

Digitized by Google

minor eſt, quam AD; ita erit etiam CG minor, quam GH: & propterea punctum H cadet ſemper ad alteram centri partem relate ad punctum G.

C A P. II.

Proprietates, quæ ſecantibus ellipſis competunt, oſtenduntur.

I. *De ratione, quam habent rectangula, ſub ſecantium ſegmentis contenta. Primus caſus, quum ſecantes ſunt diametri ellipſis.*

I. PRæcedenti capite oſtenſæ ſunt proprietates, quæ competunt tangentibus ellipſis; nunc eas proſequemur, quæ pertinent ad ſecantes ejuſdem, oſtendemuſque, *quam rationem habeant inter ſe rectangula, contenta ſub ſegmentis duarum rectarum, quæ ſibi mutuo occurrentes, utrinque ad ellipſim terminantur.*

Hic autem varii ſunt caſus diſtinguendi, pro diverſa qualitate rectarum, quæ ſibi mutuo occurrunt, & utrinque terminantur ad ellipſim. Primo igitur ſupponemus, rectas illas eſſe *binas diametros ellipſis*, & *oſtendemus, rectangulum ſub ſegmentis unius eſſe ad rectangulum ſub ſegmentis alterius in duplicata ratione ipſarum diametrorum.*

FIG. 5. Sint enim AB, KL duæ quævis ellipſis diametri, quæ ſibi mutuo occurrunt in ipſo centro C. Dico, rectangulum ſub ſegmentis unius AC, BC, eſſe ad rectangulum ſub ſegmentis alterius KC, LC, ut eſt quadratum dia-

Digitized by Google

diametri AB ad quadratum diametri KL.

Nam, quum utraque diameter ſecta ſit bifariam in centro C; erit in ratione ipſarum AB, KL, tam AC ad KC, quam BC ad LC. Sed rectangulum ACB eſt ad rectangulum KCL in ratione compoſita ex AC ad KC, & ex BC ad LC. Quare ratio eorundem rectangulorum ACB, KCL duplicata erit diametrorum AB, KL.

II. Supponemus ſecundo, *ex rectis, ſibi mutuo occurrentibus, unam quidem eſſe diametrum, alteram ordinatam ipſius. Et in iſto caſu rectangulum ſub ſegmentis prioris rectæ erit ad rectangulum ſub ſegmentis alterius rectæ in duplicata ratione ejus, quam habet diameter ad ſuam conjugatam.*

II. Secundus caſus, quum ex ſecantibus una quidem eſt diameter, altera eſt ejus ordinata.

Sit enim AB diameter aliqua ellipſis, cujus KL ſit conjugata; ſitque etiam MO una ex ordinatis ejus diametri, quæ ipſi diametro occurrens in puncto N, utrinque ad ellipſim terminetur. Dico, rectangulum ANB eſſe ad rectangulum MNO, ut eſt AB quadratum ad KL quadratum. FIG. 5.

Nam recta MO, velut ordinata ipſius AB, bifariam ſecta eſt in puncto N. Quare erit MN quadratum æquale rectangulo MNO: & propterea erit, ut rectangulum ANB ad rectangulum MNO, ita idem rectangulum ANB ad MN quadratum. Sed rectangulum ANB eſt ad MN quadratum, ut AB quadratum ad KL quadratum. Igitur in hac eadem ratione erit pariter rectangulum ANB ad rectangulum MNO.

III. Supponemus tertio, *rectas ſibi mutuo* *III. Tertius ca-*

 oc-

Digitized by Google

ſus, quum duæ ſecantes ſunt ordinatæ, quæ ad duas diametros conjugatas referuntur.

occurrentes eſſe ordinatas, quæ ad duas diametros conjugatas referuntur; oſtendemuſque, rectangulum ſub ſegmentis unius eſſe ad rectangulum ſub ſegmentis alterius in ratione duplicata reciproca ipſarum diametrorum.

Fig. 5.

Sint namque AB, KL duæ ellipſis diametri conjugatæ; ſitque etiam MO ordinata diametri AB, & EF ordinata diametri KL, quæ utrinque ad ellipſim terminatæ, ſibi mutuo occurrant in puncto H. Dico, rectangulum MHO eſſe ad rectangulum EHF, ut eſt KL quadratum ad AB quadratum.

Ex puncto E ducatur ad diametrum AB ordinata EG. Et quoniam, propter ellipſim, KL quadratum eſt ad AB quadratum, tam ut MN quadratum ad rectangulum ANB, quam ut EG quadratum ad rectangulum AGB; erit quoque, ut KL quadratum ad AB quadratum, ita differentia quadratorum MN, EG ad differentiam rectangulorum ANB, AGB.

Jam, propter æquales EG, NH, differentia quadratorum MN, EG eſt æqualis rectangulo MHO. Itemque, quum rectangulum ANB æquale ſit differentiæ quadratorum CA, CN, & rectangulum AGB æquale differentiæ quadratorum CA, CG; erit differentia rectangulorum ANB, AGB æqualis differentiæ quadratorum CG, CN, quæ tantundem valet, ac rectangulum EHF. Unde erit, ut KL quadratum ad AB quadratum, ita rectangulum MHO ad rectangulum EHF.

IV. *Quartus caſus, quum*

IV. Supponemus quarto, *ex rectis, ſibi invicem occurrentibus, unam eſſe diametrum, aliam*

aliam verò ordinatam alterius diametri . Et quum id contingit, erit rectangulum ſub ſegmentis illius ad rectangulum ſub ſegmentis iſtius, ut eſt quadratum prioris diametri ad quadratum conjugatæ alterius diametri. *duarum ſecantium una eſt diameter, & alia ordinata alterius diametri.*

Sit enim AB aliqua ellipſis diameter, cujus conjugata ſit KL, & MO una ex ejus ordinatis, utrinque ad ellipſim terminata. Sit porro EF diameter alia, quæ conveniat cum ordinata prioris MO in puncto H. Dico, rectangulum EHF eſſe ad rectangulum MHO, ut eſt EF quadratum ad KL quadratum. FIG. 6.

Ducantur namque ex punctis E, H, M rectæ EG, HI, MR, ipſi AB parallelæ, quæ conveniant cum KL in punctis G, I, R. Et, ob triangula æquiangula CEG, CHI, erit, ut CG quadratum ad CI quadratum, ita EG quadratum ad HI, ſeu MR quadratum. Sed, propter ellipſim, EG quadratum eſt ad MR quadratum, ut rectangulum KGL ad rectangulum KRL. Itaque erit ex æquali, ut CG quadratum ad CI quadratum, ita rectangulum KGL ad rectangulum KRL.

Hinc, conjungendo terminos prioris rationis cum terminis ſecundæ, erit quoque, ut CG quadratum ad CI quadratum, ita CK quadratum ad rectangulum KRL una cum CI quadrato. Quumque CG quadratum ſit ad CI quadratum, ut eſt CE quadratum ad CH quadratum; erit rurſus ex æquali, ut CE quadratum ad CH quadratum, ita CK quadratum ad rectangulum KRL una cum CI quadrato.

Atque hinc, convertendo, erit ulterius, ut CE quadratum ad differentiam quadrato-

rum CE, CH, ita CK quadratum ad differentiam quadratorum CR, CI. Sed differentia quadratorum CE, CH eſt æqualis rectangulo EHF; & differentia quadratorum CR, CI, ſive MN, NH eſt æqualis rectangulo MHO. Itaque erit, ut CE quadratum ad rectangulum EHF, ita CK quadratum ad rectangulum MHO; & permutando, ut CE quadratum ad CK quadratum, ſive etiam, ut EF quadratum ad KL quadratum, ita rectangulum EHF ad rectangulum MHO.

V. *Poſtremus caſus, quum ſecantes ſunt ordinatæ duarumquarumvis diametrorum.* FIG. 7.

V. Supponemus denique, *rectas duas, ſibi mutuo occurrentes, ordinatas eſſe duarum diametrorum, quæ inter ſe nequaquam ſunt conjugatæ*. Et in iſto caſu rectangula, contenta ſub ſegmentis ipſarum, erunt, ut quadrata, quæ fiunt ex conjugatis earum diametrorum.

Sint enim AB, RS duæ quævis ellipſis diametri; ſitque MO una ex ordinatis diametri AB, & PQ una ex ordinatis diametri RS. Conveniant autem inter ſe duæ iſtæ ordinatæ in puncto H. Dico, rectangulum MHO eſſe ad rectangulum PHQ, ut eſt quadratum, quod fit ex conjugata diametri AB, ad quadratum, quod fit ex conjugata diametri RS.

Ducatur namque per punctum H diameter tertia EF. Et quoniam diameter iſta EF ſecat MO, ordinatam diametri AB, in puncto H; erit, ex oſtenſis, ut rectangulum EHF ad rectangulum MHO, ita EF quadratum ad quadratum conjugatæ diametri AB. Quumque eadem EF ſecat pariter PQ, ordinatam diametri RS, in puncto H; erit quoque, ut rectangulum EHF ad rectangulum PHQ, ita EF quadra-

Digitized by Google

dratum ad quadratum conjugatæ diametri RS. Quare ordinando erit, ut rectangulum MHO ad rectangulum PHQ, ita quadratum ex conjugata diametri AB ad quadratum ex conjugata diametri RS.

VI. Et quidem univerſale theorema, quod hac in re locum habet, hujuſmodi eſt, quod *ſi intra ellipſim binæ ducantur rectæ lineæ, quæ ſeſe mutuo ſecent; rectangula, quæ fiunt ex ſegmentis ipſarum, ſint, ut quadrata ex conjugatis earum diametrorum, ad quas rectæ illæ velut ordinatæ referuntur.* Et omnia alia theoremata, ſuperius oſtenſa, ſunt tantum caſus ſpeciales iſtius.

VI. Theorema generale, quod hac in re locum habet, in medium affertur.

Nam primo, ſi ductæ rectæ lineæ tranſeant per centrum, & ſint ellipſis diametri; erunt ipſæmet conjugatæ earum diametrorum, ad quas eædem velut ordinatæ referuntur. Unde, vi ejus theorematis generalis, omnino neceſſe eſt, ut rectangula ſub ſegmentis ipſarum ſint, ut quadrata earundem.

Secundo, ſi una ex iis rectis ſit diameter, & altera ejus ordinata: quemadmodum prior eſt conjugata illius diametri, ad quam ipſa velut ordinata refertur; ſic conjugata ejus diametri, quæ ſecundam agnoſcit tamquam ſuam ordinatam, eſt conjugata diametri prioris. Quare, per theorema generale, rectangulum ſub ſegmentis diametri ad rectangulum ſub ſegmentis ordinatæ erit, ut quadratum diametri ad quadratum ſuæ conjugatæ.

Tertio, ſi rectæ, ſeſe invicem ſecantes, ſint ordinatæ duarum ellipſis diametrorum conjugatarum; non aliæ erunt conjugatæ dia-

Digitized by Google

metrorum, ad quas rectæ illæ velut ordinatæ referuntur, quam eædem diametri, inverſo ordine ſumptæ. Unde, per theorema generale, rectangula, contenta ſub ſegmentis earum ordinatarum, erunt in ratione reciproca duplicata ſuarum diametrorum.

Denique, ſi una ex iis rectis ſit diameter, & altera ſit ordinata alterius diametri; erit ipſa prior recta conjugata illius diametri, ad quam eadem velut ordinata refertur. Unde, ob theorema generale, rectangulum ſub ſegmentis prioris diametri erit ad rectangulum ſub ſegmentis ordinatæ alterius diametri, ut eſt quadratum diametri prioris ad quadratum conjugatæ alterius diametri.

VII. *Quod idem theorema ſit verum, etiam ſi una ex ſecantibus vertatur in tangentem.*

VII. Fieri autem poteſt, ut *una ex ſecantibus tangens evadat*: nimirum, quum puncta duo ſectionis coeunt in unum. In iſto caſu rectangulum ſub ejus ſegmentis vertetur in quadratum ipſius tangentis. Unde inter quadratum iſtud, & rectangulum, ſub alterius ſecantis portionibus contentum, eadem adhuc ratio obtinebit.

Quin etiam *verti poteſt in tangentem utraque ſecans*. Et quum id contingit, ambo quidem rectangula, ſub ſecantium portionibus contenta, abibunt in quadrata ipſarum tangentium. Ex quo fit, ut inter quadrata, quæ ex tangentibus fiunt, eadem pariter ratio debeat locum habere.

Et iſtud quidem jam præcedenti capite ſpeciatim a nobis oſtenſum fuit. Vidimus enim, quod ſi fuerint tangentes duæ AX, EX, ſibi mutuo occurrentes in X; quadrata ipſa- FIG. 2.

rum

Digitized by Google

rum eandem habeant rationem inter ſe, quam quadrata, quæ fiunt ex conjugatis diametrorum AB, EF.

Ad illud vero quod attinet, nec etiam difficile erit, veritatem ejus ſpeciatim oſtendere. Sed diſtinguendi ſunt tamen duo caſus. Primus eſt, quum ſecans eſt parallela diametro, quæ pertinet ad punctum contactus. Alter eſt, quum eadem ſecans ei diametro nequaquam eſt parallela.

VIII. Ponamus itaque primo, *ſecantem parallelam eſſe diametro, quæ pertinet ad punctum contactus*: adeo nempe, ut exiſtente EH tangente, ſecans ſit recta HO, parallela diametro EF. Jamque in hoc caſu diameter, ad quam recta MO velut ordinata refertur, erit illa eadem, quæ eſt conjugata ipsius EF. VIII. *Primus caſus, quum ſecans eſt parallela diametro, quæ pertinet ad punctum contactus.* FIG. 8.

Sit igitur AB conjugata diametri EF. Quumque viciſſim EF ſit conjugata ipſius AB; jam illud oſtendendum nobis erit, ut EH quadratum ſit ad rectangulum MHO, veluti eſt AB quadratum ad EF quadratum. Iſtud autem nullo negotio oſtendemus ſequenti ratione.

Ex puncto M ducatur ad diametrum EF ordinata MR. Et quoniam duæ CE, HN inter ſe ſunt æquales; erit etiam CE quadratum æquale quadrato, quod fit ex HN. Sed CE quadratum eſt æquale rectangulo ERF una cum CR quadrato. Et HN quadratum eſt æquale rectangulo MHO una cum MN, ſive eodem CR quadrato. Quare, dempto communi quadrato ex CR, remanebit rectangulum ERF æquale rectangulo MHO.

Quia autem æqualia ſunt quoque qua-

drata, quæ fiunt ex ipſis MR, EH; erit, ut MR quadratum ad rectangulum ERF, ita EH quadratum ad rectangulum MHO. Sed MR quadratum eſt ad rectangulum ERF, ut AB quadratum ad EF quadratum. Et igitur ex æquali in eadem ratione, quam habet AB quadratum ad EF quadratum, erit quoque EH quadratum ad rectangulum MHO.

IX. *Alter caſus, quum ſecans non eſt parallela diametro, quæ tranſit per punctum contactus.* Fig. 8.

IX. Ponamus ſecundo, *ſecantem haud quidem parallelam eſſe diametro, quæ pertinet ad punctum contactus*: adeo nempe, ut exiſtente EH tangente, ſecans ſit recta HS, quæ occurrit diametro EF. Jamque, ſi KL ſit diameter, ad quam recta TS velut ordinata refertur; oſtendendum erit, EH quadratum eſſe ad rectangulum THS, ut eſt quadratum conjugatæ diametri EF ad quadratum conjugatæ diametri KL.

Ducatur ex puncto H ſecans alia HO, quæ ipſi EF ſit parallela; ſitque AB diameter, quæ ipſam MO velut ſuam ordinatam agnoſcit. Itaque, quum ſecans HO parallela ſit diametro EF, quæ pertinet ad punctum contactus E; erit EH quadratum ad rectangulum MHO, ut eſt quadratum conjugatæ diametri EF ad quadratum conjugatæ diametri AB.

Quoniam autem HO, HS ſunt ſecantes duæ, quæ velut ordinatæ referuntur ad diametros AB, KL; erit, ex ſuperius oſtenſis, rectangulum MHO ad rectangulum THS, ut eſt quadratum conjugatæ diametri AB ad quadratum conjugatæ diametri KL. Quare ordinando erit, ut EH quadratum ad rectangulum THS, ita quadratum ex conjuga-

ta

ta diametri EF ad quadratum ex conjugata diametri KL.

X. *Demonſtratio ſpecialis, quando ſecans eſt diameter.* Fig. 9.

X. Fatendum eſt tamen, *demonſtrationem iſtam haud quidem generalem eſſe*. Nam fieri poteſt, ut recta HO, ipſi EF parallela, ellipſim minime ſecet. Quum id contingit, duci poteſt recta HO per centrum ellipſis. Jamque obtinebit eadem demonſtratio, ſi, reliquis ut ſupra manentibus, oſtendi poſſit, EH quadratum eſſe ad rectangulum MHO, ut eſt quadratum ex conjugata diametri EF ad quadratum diametri MO. Id vero oſtendemus in hunc modum.

Sit GI conjugata ipſius EF, ducaturque ex puncto M ad eandem EF ordinata MR. Et quoniam CH quadratum eſt ad CM quadratum, ut CE quadratum ad CR quadratum; erit convertendo, ut CH quadratum ad rectangulum MHO, ita CE quadratum ad rectangulum ERF. Sed, ob ellipſim, CE quadratum eſt ad rectangulum ERF, ut eſt CG quadratum ad MR quadratum. Itaque erit ex æquali, ut CG quadratum ad MR quadratum, ita CH quadratum ad rectangulum MHO.

Quoniam vero MR quadratum eſt ad EH quadratum, ut CM quadratum ad CH quadratum; erit ex æquo perturbando, ut CG quadratum ad EH quadratum, ita CM quadratum ad rectangulum MHO; & permutando, ut CG quadratum ad CM quadratum, ita EH quadratum ad rectangulum MHO. Sed CG quadratum eſt ad CM quadratum, ut GI quadratum ad MO quadratum. Jtaque erit

ex

ex æquali, ut EH quadratum ad rectangulum MHO, ita GI quadratum ad MO quadratum.

XI. *Theorema de ratione, quam habent duæ ellipſis tangentes, rurſus oſtenditur.*

XI. Atque hinc modo nullo negotio oſtendi poteſt, quod *ſi duæ ellipſis tangentes ſibi mutuo occurrant, eæ ſint inter ſe, veluti conjugatæ diametrorum, quæ pertinent ad puncta contactus*.

Sint enim AH, EH duæ ellipſis tangentes, quæ ſibi invicem occurrant in puncto H. Ducantur ex punctis contactus A, & E diametri AB, EF. Dico eſſe, ut AH ad EH, ita conjugata diametri AB ad conjugatam diametri EF.

Fig.9.

Ducatur namque diameter alia MO, quæ tranſeat per punctum H. Et quoniam AH eſt tangens, & HO eſt ſecans, tranſiens per centrum; erit, ut AH quadratum ad rectangulum MHO, ita quadratum ex conjugata diametri AB ad quadratum ipſius MO.

Similiter, quia EH eſt tangens, & HO eſt ſecans, tranſiens per centrum; erit, ut rectangulum MHO ad EH quadratum, ita MO quadratum ad quadratum, quod fit ex conjugata diametri EF.

Hinc ex æquo ordinando erit, ut AH quadratum ad EH quadratum, ita quadratum ex conjugata diametri AB ad quadratum ex conjugata diametri EF: & propterea tangentes duæ AH, EH erunt, ut conjugatæ diametrorum AB, EF.

XII. *Alia duo theoremata ex hactenus oſtenſis deducuntur.*

XII. Cæterum ex iis, quæ hactenus oſtenſa ſunt, prono alveo fluunt ſequentia duo theoremata.

Primum theorema eſt, quod *ſi duabus elli-*

Digitized by Google

ellipſis tangentibus parallelæ fuerint duæ ſecantes, & conveniant inter ſe, tum tangentes, cum ſecantes; rectangula, ſub ſecantium ſegmentis contenta, ſint proportionalia quadratis, quæ ex tangentibus fiunt.

Nam diametri, ad quas duæ ſecantes velut ordinatæ referuntur, ſunt illæ eædem, quæ pertinent ad puncta contactus. Quare in eadem illa ratione, quam habent inter ſe quadrata tangentium, erunt quoque rectangula, quæ ſub ſecantium ſegmentis continentur.

Alterum theorema eſt, quod *ſi duabus ſecantibus ellipſis parallelæ fuerint binæ aliæ ſecantes, & conveniant inter ſe, tam illæ, quam iſtæ; rectangula ſub ſegmentis illarum ſint proportionalia rectangulis, quæ ſub ſegmentis iſtarum continentur.*

Nam diametri, ad quas duæ poſteriores ſecantes velut ordinatæ referuntur, ſunt illæ eædem, quæ agnoſcunt velut ſuas ordinatas ſecantes priores. Quare in eadem illa ratione, quam habent inter ſe rectangula ſub ſegmentis primarum ſecantium, erunt quoque rectangula ſub ſegmentis aliarum.

C A P. III.

Demonſtrantur proprietates, quæ competunt tangentibus hyperbolæ.

I. Circa tangentes hyperbolæ, jam illud quoque ſuperius oſtenſum eſt; quod

I. *Proprietates duæ princi-*

pales, quæ hyperbolæ tangenti competunt.

quod *ſi ex vertice alicujus diametri recta ducatur, ordinatis ejus parallela, ea tangat hyperbolam in ſolo illo vertice.* Nunc autem ſubjungemus, quod *in locum, tangente, & hyperbola contentum, nulla alia cadat recta linea.*

Sit enim hyperbola AM, cujus AB ſit

FIG. 10. diameter aliqua, AD parameter ejus, & DAH recta, ordinatis ejuſdem diametri parallela. Dico, quod ſicuti recta DAH contingit hyperbolam in ſolo vertice A, ita in locum, contentum tangente, & eadem hyperbola, nulla alia recta linea duci poſſit ex eodem vertice A.

Si fieri poteſt, ducatur recta alia AI, in qua ſumpto puncto quovis P, agatur per illud recta PN, ipſi DH parallela, conveniens cum recta BD in puncto O. Et quoniam, propter hyperbolam, MN quadratum eſt æquale rectangulo ANO; erit PN quadratum majus illo rectangulo. Quare, ſi extendatur NO uſque in S, ita ut PN quadratum ſit æquale rectangulo ANS, & jungatur AS; hæc ſecabit rectam BD in puncto aliquo Q.

Ducatur ergo per punctum iſtud Q recta QI, eidem AH parallela. Et quoniam PN quadratum eſt æquale rectangulo ANS; erit, ut PN quadratum ad AN quadratum, ita rectangulum ANS ad idem AN quadratum; ſive etiam, ita NS ad AN. Sed PN quadratum eſt ad AN quadratum, ut IK quadratum ad AK quadratum. Et NS eſt ad AN, ut KQ ad AK; ſive etiam, ut rectangulum AKQ ad AK quadratum; ſive demum, ut LK quadratum ad AK quadratum. Quare erit IK quadratum æquale quadrato, quod fit ex LK.

Quod

Quod fieri non poteſt.

II. Quælibet ergo recta linea, quæ ex puncto contactus ducitur infra tangentem, neceſſe eſt, ut primo ſecet hyperbolam, tum cadat in locum, tangente, & hyperbola contentum. Hinc autem duo conſequuntur, quæ aditum nobis aperient ad oſtendendas proprietates omnes, quæ hyperbolæ tangentibus competunt.

II. *Corollaria, quæ ex duabus præcedentibus proprietatibus conſequuntur.* FIG. II.

Primum eſt, quod *ad unum, idemque punctum hyperbolæ nonniſi unica tangens duci poſſit*. Nam, ſi duci poſſent tangentes duæ; jam una caderet in locum, hyperbola, & tangente altera comprehenſum. Quod quidem oſtenſum eſt fieri non poſſe.

Alterum eſt, quod *ſi recta linea contingat hyperbolam in puncto aliquo, ea debeat eſſe parallela ordinatis illius diametri, quæ pertinet ad illud punctum*. Nam aliter, ducta ex eo puncto recta alia, ordinatis iis parallela, foret iſta quoque tangens hyperbolæ; atque adeo ad unum, idemque punctum hyperbolæ duæ tangentes duci poſſent. Quod fieri nequit.

III. His jactis principiis, facile modo erit, *eas primum tangentis proprietates oſtendere, quæ ei competunt, ubi alicui diametro occurrit*. Tangens igitur ET, ducta ad punctum E, verticem diametri EF, conveniat cum diametro altera AB in puncto T. Et ducatur, tam ad diametrum AB ordinata EG, quam ad diametrum EF ordinata AO.

III. *Proprietates, quæ pertinent ad tangentem hyperbolæ, alicui diametro occurrentem.* FIG. II.

Primo itaque erit, ut CT ad CA, ita CA ad CG. Nam, ex ſuperius oſtenſis, BG eſt ad AG, ut FO ad EO; & dividendo, AB eſt

eſt ad AG, ut EF ad EO ; & capiendo antecedentium dimidia, CA eſt ad AG, ut CE ad EO ; & addendo antecedentes conſequentibus, CA eſt ad CG, ut CE ad CO. Sed, propter parallelas AO, ET, ut eſt CE ad CO, ita eſt CT ad CA. Quare erit ex æquali, ut CT ad CA, ita CA ad CG.

Secundo erit, rectangulum AGB æquale rectangulo CGT : adeo, ut AG erit ad CG, ut eſt TG ad BG. Quum enim idem CG quadratum æquale ſit, tam rectangulo AGB una cum CA quadrato, quam duobus rectangulis CGT, TCG ; erit rectangulum AGB una cum CA quadrato æquale duobus rectangulis CGT, TCG. Sed, ob rectas continue proportionales CT, CA, CG, quadratum ex CA eſt æquale rectangulo TCG. Quare etiam rectangulum AGB æquale erit rectangulo CGT.

Tertio, ſi AD ſit parameter ipſius diametri AB, erit, ut EG quadratum ad rectangulum CGT, ita parameter AD ad diametrum AB. Jam enim, propter hyperbolam, in hac ratione eſt EG quadratum ad rectangulum AGB. Sed rectangulum AGB oſtenſum eſt æquale rectangulo CGT. Quare in eadem pariter ratione erit quadratum ordinatæ EG ad rectangulum aliud CGT.

Quarto erit rectangulum ATB æquale rectangulo CTG: adeo, ut erit AT ad GT, ut eſt CT ad BT. Nam, ob rectas continue proportionales CT, CA, CG, quadratum ex CA eſt æquale rectangulo TCG. Sed quadratum ex CA eſt æquale rectangulo ATB una cum CT quadrato; & rectangulum TCG eſt æquale

le rectangulo CTG una cum eodem CT quadrato. Quare, dempto communi quadrato ex CT, remanebit rectangulum ATB æquale rectangulo CTG.

Denique, ſi KL ſit conjugata ipſius AB, cum qua tangens ET conveniat in puncto V, & ducatur ad eam ordinata EH; erit, ut CV ad CK, ita CK ad CH. Nam, propter hyperbolam, CK quadratum eſt ad EG, ſeu CH quadratum, ut CA quadratum ad rectangulum AGB; ſive etiam, ut rectangulum TCG ad rectangulum CGT; ſive demum, ut CT ad GT. Sed CT eſt ad GT, ut CV ad EG, ſeu CH. Itaque erit ex æquali, ut CK quadratum ad CH quadratum, ita CV ad CH: & propterea tres rectæ CV, CK, CH continue proportionales erunt.

IV. *Præcedentium proprietaum converſa demonſtrantur.* Fig. 11.

IV. Sed facile quoque erit, *converſas harum proprietatum oſtendere*. Nimirum primo, quod recta ET ſit tangens hyperbolæ, ſi utique CT ſit ad CA, ut eſt CA ad CG. Nam, ex ſuperius oſtenſis, BG eſt ad AG, ut FO ad EO; & dividendo, AB eſt ad AG, ut EF ad EO; & capiendo antecedentium dimidia, CA eſt ad AG, ut CE ad EO; & addendo antecedentes conſequentibus, CA eſt ad CG, ut CE ad CO. Sed, ex hypotheſi, CA eſt ad CG, ut CT ad CA. Quare, erit ex æquali, ut CT ad CA, ita CE ad CO: & propterea recta ET, velut ipſi AO parallela, tangens erit hyperbolæ.

Secundo, quod recta ET tangat hyperbolam in puncto E, ſi fuerit rectangulum AGB æquale rectangulo CGT; atque adeo, ut AG

ad

Digitized by Google

ad CG, ita TG ad BG. Nam, ſemper ac rectangulum AGB eſt æquale rectangulo CGT; ſi utrumque ſeorſim auferatur ex eodem CG quadrato, erit quoque CA quadratum æquale rectangulo TCG: proindeque erit, ut CT ad CA, ita CA ad CG; & conſequenter ET tangens erit hyperbolæ.

Tertio, quod recta ET contingat hyperbolam in puncto E, ſi fuerit, ut parameter AD ad diametrum AB, ita quadratum ordinatæ EG ad rectangulum CGT. Jam enim quadratum ordinatæ EG eſt ad rectangulum AGB in illa ratione. Quare, ſemper ac idem quadratum ſupponitur habere eandem rationem ad rectangulum CGT; erit rectangulum AGB æquale rectangulo CGT: proindeque recta ET tangens erit hyperbolæ.

Quarto, quod recta ET ſit tangens hyperbolæ, ſi fuerit rectangulum ATB æquale rectangulo CTG; & conſequenter, ut AT ad GT, ita CT ad BT. Nam, ſemper ac ponitur rectangulum ATB æquale rectangulo CTG; addito communi quadrato ex CT, erit quoque CA quadratum æquale rectangulo TCG: & propterea, quum ſit, ut CT ad CA, ita CA ad CG; erit recta ET tangens hyperbolæ.

Denique, quod recta ET hyperbolam contingat in puncto E, ſi fuerit, ut CV ad CK, ita CK ad CH. Nam ſemper ac CV eſt ad CK, ut CK ad CH; erit quoque ut CV ad CH, ita CK quadratum ad CH, ſive EG quadratum. Sed, propter hyperbolam, CK quadratum eſt ad EG quadratum, ut CA quadratum ad rectangulum AGB. Quare erit ex æquali, ut

CA

Digitized by Google

CA quadratum ad rectangulum AGB, ita CV ad CH.

Hinc, addendo antecedentes conſequentibus, erit etiam, ut CA quadratum ad CG quadratum, ita CV ad VH. Unde, quia CV eſt ad VH, ut CT ad EH, ſeu CG; erit rurſus ex æquali, ut CA quadratum ad CG quadratum, ita CT ad CG; adeoque, quum ſit, ut CT ad CA, ita CA ad CG, erit recta ET tangens hyperbolæ.

V. Nunc *eas quidem proprietates oſtendemus, quæ tangentibus hyperbolæ ſibi mutuo occurrentibus, competunt.* Hunc in finem ad duo quælibet hyperbolæ puncta A, & E ducantur tangentes duæ AX, EX, quæ ſibi mutuo occurrant in X. Extendantur eædem uſque donec conveniant cum diametris AB, EF in punctis L, & T. Et erit primo, ut AX ad LX, ita EX ad TX.

V. *Tangentium ſibi mutuo occurrentium proprietas prima.* FIG. II.

Ducantur enim ad diametros AB, EF ordinatæ EG, AO. Et, per ſuperius oſtenſa, erit, ut CG ad CA, ita CO ad CE. Sed, propter tangentem ET, CG eſt ad CA, ut eſt CA ad CT. Itemque, propter tangentem AL, CO eſt ad CE, ut eſt CE ad CL. Quare erit ex æquali, ut CA ad CT, ita CE ad CL: & propterea, quum duo triangula ACL, ECT habeant circa angulum communem C latera reciproce proportionalia, erit triangulum ACL æquale triangulo ECT.

Hinc, dempto communi trapetio CTXL, erit quoque triangulum ELX æquale triangulo ATX. Unde, quum duo iſta triangula habeant angulum EXL æqualem angulo

Digitized by Google

AXT; habebunt quoque latera circum æquales iſtos angulos reciproce proportionalia; proindeque erit, ut AX ad LX, ita EX ad TX; hoc eſt tangentes duæ AL, ET in eadem ratione ſeſe mutuo ſecabunt in puncto X, in quo ſibi invicem occurrunt.

VI. *Secunda proprietas tangentium ſibi invicem occurrentium.*

VI. Hinc autem *ſequitur ſecundo*, tangentes duas AX, EX eandem cum ordinatis EG, AO rationem habere; adeoque eſſe, ut AX ad EX, ita EG ad AO.

FIG. 11. Eſt enim, ex ſuperius oſtenſis, ut CO ad CE, ita CG ad CA. Sed, propter triangula æquiangula COA, CET, CO eſt ad CE, ut AO ad ET. Pariterque, ob triangula æquiangula CGE, CAL, CG eſt ad CA, ut EG ad AL. Quare erit ex æquali, ut EG ad AL, ita AO ad ET; & permutando erit etiam, ut EG ad AO, ita AL ad ET.

Quia autem oſtenſum eſt, AX eſſe ad LX, ut eſt EX ad TX; addendo antecedentes conſequentibus, erit quoque, ut AX ad AL, ita EX ad ET; & permutando erit pariter, ut AX ad EX, ita AL ad ET. Unde, quum in eadem ratione rectarum AL, ET ſit, tam AX ad EX, quam EG ad AO; erit, ex æquali, ut AX ad EX, ita EG ad AO.

VII. *Tertia proprietas tangentium, quæ inter ſe mutuo conveniunt.*

VII. Atque hinc modo *ſequitur ulterius*, eaſdem tangentes AX, EX eandem rationem habere cum conjugatis diametrorum AB, EF, quæ pertinent ad puncta contactus A, & E.

FIG. 11. Nam, per ſuperius oſtenſa, ordinatæ EG, AO ſunt, ut conjugatæ diametrorum AB, EF. Sed tangentes AX, EX ſunt inter ſe, ut ordinatæ EG, AO. Quare erit ex æquali, ut

AX

Digitized by Google

AX ad EX, ita conjugata diametri AB ad conjugatam diametri EF.

Quemadmodum autem tangentes AX, EX ſunt, ut conjugatæ diametrorum AB, EF; ita quadrata tangentium AX, EX erunt, ut quadrata earundem conjugatarum; atque adeo, ut figuræ ipſarum diametrorum AB, EF, quibus ſuarum conjugatarum quadrata ſunt æqualia.

Unde modo, ſicuti figuræ diametrorum AB, EF rationem habent compoſitam ex ipſis diametris, & parametris earundem; ita quoque quadratum tangentis AX ad quadratum tangentis EX rationem habebit compoſitam ex diametro AB ad diametrum EF, & ex parametro diametri AB ad parametrum diametri EF.

VIII. *Quarta proprietas tangentium, quæ ſibi invicem occurrunt.* FIG. II.

VIII. Pertinet huc quoque *hæc alia proprietas*, quod ſi AX, EX ſint duæ tangentes hyperbolæ, & ducta ex puncto contactus A diametro AB, agatur per aliud contactus punctum E recta BE, conveniens cum tangente AX in puncto I; quod, inquam, AI ſit dupla ipſius AX.

Protrahatur enim tangens EX, uſque donec conveniat cum diametro AB in puncto T. Tum ducatur ad eandem diametrum ordinata EG. Et quoniam, propter tangentem ET, ut eſt BT ad CT, ita eſt GT ad AT; erit permutando, ut BT ad GT, ita CT ad AT. Sed, componendo, BG eſt ad GT, ut CA ad AT. Quare erit rurſus permutando, ut BG ad CA, ita GT ad AT.

Jam AI ad AX rationem habet compo-

 ſitam

Digitized by Google

ſitam ex AI ad EG, & ex EG ad AX. Sed, ob triangula æquiangula BAI, BGE, AI eſt ad EG, ut AB ad BG. Itemque, ob triangula æquiangula TGE, TAX, EG eſt ad AX, ut GT ad AT, ſive etiam, ut BG ad CA. Quare AI ad AX rationem habebit compoſitam ex AB ad BG, & ex BG ad CA.

Patet autem, duas iſtas rationes componere pariter rationem, quam habet AB ad CA. Quare erit ex æquali, ut AI ad AX, ita AB ad CA: proindeque, ſicuti AB dupla eſt ipſius CA; ita etiam AI dupla erit ipſius AX.

IX. *Præcedentis proprietatis converſa demonſtratur.* FIG. 11.

IX. Sed facile eſt etiam *converſam hujus oſtendere*: nimirum, quod ſi AI ſit dupla ipſius AX, & AX ſit tangens hyperbolæ; etiam EX contingere debeat hyperbolam in puncto E.

Quemadmodum enim AI dupla ponitur ipſius AX, ita AB dupla eſt ipſius CA. Quare erit, ut AB ad CA, ita AI ad AX. Sed AI ad AX rationem habet compoſitam ex AI ad EG, & ex EG ad AX; ſive etiam ex AB ad BG, & ex GT ad AT. Itaque AB ad CA habebit pariter rationem compoſitam ex AB ad BG, & ex GT ad AT.

Jam AB ad CA habet quoque rationem compoſitam ex AB ad BG, & ex BG ad CA. Quare erit, ut BG ad CA, ita GT ad AT; & permutando, ut BG ad GT, ita CA ad AT. Sed dividendo BT eſt ad GT, ut CT ad AT. Itaque rurſus permutando erit, ut BT ad CT, ita GT ad AT: & propterea, ex ſuperius oſtenſis, recta ET tangens erit ellipſis.

X. *Quinta*

X. Præterea, *ut alias tangentium hyperbolæ*

bolæ proprietates proſequamur, ſint adhuc AX, EX duæ tangentes hyperbolæ. Et, ducta diametro AB, ſit BZ tangens tertia, quæ conveniat cum EX in puncto Z. Sitque demum KL conjugata ipſius AB. Dico, rectangulum ex AX in BZ æquale eſſe quadrato, quod fit ex CK. *proprietas tangentium ſibi mutuo occurrentium.* FIG. 12.

Conveniat namque tangens EX cum diametro AB in puncto T, & cum ejus conjugata KL in puncto V. Ducaturque ex puncto contactus E, tum recta EG ordinata ad diametrum AB, cum recta EH ordinata ad diametrum KL.

Quia igitur ET eſt tangens hyperbolæ erit, ut BT ad GT, ita GT ad AT. Sed, propter triangula æquiangula TBZ, TCV, BT eſt ad CT, ut BZ ad CV. Itemque, propter triangula æquiangula TGE, TAX, GT eſt ad AT, ut EG, ſive CH ad AX. Quare erit ex æquali, ut BZ ad CV, ita CH ad AX: & propterea rectangulum ex AX in BZ æquale erit rectangulo HCV.

Et quoniam eadem tangens ET occurrit quoque conjugatæ diametro KL in puncto V; erit, ex ſuperius oſtenſis, ut CH ad CK, ita CK ad CV. Quare rectangulum HCV æquale erit quadrato ex CK. Sed rectangulo HCV oſtenſum eſt æquale rectangulum ex AX in BZ. Igitur erit rectangulum ex AX in BZ æquale quadrato, quod fit ex CK.

XI. Ulterius, quemadmodum AB, KL ſunt duæ hyperbolæ conjugatæ diametri, ita ſint MR, PS binæ aliæ diametri ſimiliter conjugatæ, quæ conveniant cum tangente AX in *XI. Theorema de rectangulo ſub portionibus tangentis,*

per duas conjugatas abſciſſas. punctis X, & Y. Et *nullo item negotio oſtendemus*, quod eidem CK quadrato æquale ſit
FIG. 13. etiam rectangulum ex AX in AY.

Ductis ſiquidem, tum ordinatis MN, PQ ad diametrum AB, cum ordinatis AO, AI, ad diametros MR, PS; erit rectangulum ex MN in PQ ad CK quadratum in ratione compoſita ex MN ad CK, & ex PQ ad CK. Sed, per ea, quæ ſuperius oſtenſa ſunt, MN eſt ad CK, ut AO, ſeu CI ad CP. Itemque PQ eſt ad CK, ut CN ad CA; ſive etiam, ut CO ad CM. Itaque rectangulum ex MN in PQ ad CK quadratum rationem habebit compoſitam ex CI ad CP, & ex CO ad CM.

Jam, propter tangentem AY, diametro PS occurrentem in Y, CI eſt ad CP, ut CP ad CY; ſive etiam, ut PQ ad AY. Pariterque, ob tangentem AX, diametro MR occurrentem in X, CO eſt ad CM, ut CM ad CX, ſive etiam, ut MN ad AX. Quare rectangulum ex MN in PQ ad CK quadratum habebit quoque rationem compoſitam ex PQ ad AY, & ex MN ad AX.

Quoniam autem duæ iſtæ rationes componunt pariter rationem, quam habet rectangulum ex MN in PQ ad rectangulum ex AX in AY; erit ex æquali, ut rectangulum ex MN in PQ ad rectangulum ex AX in AY, ita idem rectangulum ex MN in PQ ad CK quadratum: & propterea rectangulum ex AX in AY æquale erit quadrato, quod fit ex CK.

XII. *Quod præcedentis* XII. Sed *converſum hujus theorematis facile quoque erit oſtendere*. Nimirum, quod

ſi AB,

Digitized by Google

ſi AB, KL ſint duæ hyperbolæ diametri conjugatæ, & rectangulum XAY, contentum ſub portionibus tangentis AX, æquale ſit quadrato, quod ſit ex CK; aliæ binæ diametri MR PS ſint etiam conjugatæ.

theorematis converſum ſit pariter verum.

FIG. 13.

Si enim PS non ſit conjugata ipſius MR, ſit ejus conjugata diameter alia TV, quæ occurrat tangenti XY in puncto W. Et quoniam MR, TV ſunt duæ hyperbolæ conjugatæ diametri, quæ conveniunt cum tangente XY in punctis X, & W; erit rectangulum ex AX in AW æquale quadrato, quod ſit ex CK.

Quia autem eidem CK quadrato poſitum eſt æquale rectangulum ex AX in AY; erit rectangulum ex AX in AW æquale rectangulo ex AX in AY: proindeque portiones duæ AW, AY æquales erunt inter ſe. Quod quum fieri nequeat, conſequens eſt, ut PS ſit conjugata ipſius MR.

XIII. Atque hinc modo *colligi alterius poteſt*, quod, ſi ex extremitatibus diametri AB, ducantur tangentes duæ AX, BZ, convenientes cum tangente tertia ET in punctis X, & Z, junganturque rectæ CX, CZ; iſtæ, ad hyperbolas uſque productæ, exhibebunt nobis binas earum diametros conjugatas.

XIII. *Theorema pro determinatione diametrorum conjugatarum hyperbolæ.*

FIG. 12.

Si enim CZ producatur, uſque donec conveniat cum tangente AX in puncto Y; ob triangula æquiangula CBZ, CAY, erit, ut CB ad BZ, ita CA ad AY. Unde, quemadmodum æquales ſunt duæ CB, CA; ita æquales erunt pariter duæ BZ, AY: proindeque rectangulum ex AX in BZ æquale erit rectangulo ex AX in AY.

Quum autem oſtenſum ſit rectangulum ex AX in BZ æquale quadrato ex CK; erit eidem CK quadrato æquale pariter rectangulum ex AX in AY. Unde, quum duæ diametri MR, PS abſcindant ex tangente AX portiones duas AX, AY, quæ rectangulum continent, æquale quadrato, quod fit ex CK; per ea, quæ modo oſtenſa ſunt, omnino neceſſe eſt, ut MR, PS ſint duæ hyperbolarum conjugatæ diametri.

XIV. *Tangentis relate ad axem hyperbolæ proprietas ſpecialis.* FIG. 14.

XIV. Cæterum *nolim hic ſilentio prætere*, quod ſi AB ſit axis hyperbolæ, AD parameter ejus, & ET aliqua tangens; ducanturque ex puncto contactus E rectæ duæ EG, EH, una perpendicularis ad axem, & altera perpendicularis ad tangentem; quod, inquam, AB ſit ad AD, ut eſt CG ad GH.

Si enim tangens ET conveniat cum axe AB in puncto T; erit, ex ſuperius oſtenſis, ut AB ad AD, ita rectangulum CGT ad EG quadratum. Sed, ob triangulum TEH, rectangulum in E, quadratum ex EG eſt æquale rectangulo HGT. Quare erit quoque, ut AB ad AD, ita rectangulum CGT ad rectangulum HGT: & propterea, quia duo iſta rectangula ſunt inter ſe, ut CG ad GH; erit, ex æquali, ut AB ad AD, ita CG ad GH.

Quin etiam, ſi KL ſit axis conjugatus, & KI parameter ejus, cumque eo conveniat perpendicularis EH in puncto R, eidemque ordinata demittatur EF; erit ut KL ad KI, ita CF ad FR.

Jam enim AB eſt ad AD, ut CG ad GH. Sed AB eſt ad AD, ut KI ad KL; & CG eſt

ad

ad GH, ut ER ad EH; ſive etiam, ut FR ad CF. Quare erit ex æquali, ut KI ad KL, ita FR ad CF; & invertendo, KL erit ad KI, ut CF ad FR.

CAP. IV.

Demonſtrantur proprietates, quæ competunt ſecantibus hyperbolæ.

I. OStenſis proprietatibus, quæ pertinent ad tangentes hyperbolæ; ſequitur modo, ut eas oſtendamus, quæ ejuſdem ſecantibus competunt. Res autem eo redit, ut inquiramus, *quam rationem habeant inter ſe rectangula, contenta ſub ſegmentis duarum rectarum, quæ ſibi mutuo occurrentes, utrinque, vel ad eandem hyperbolam, vel etiam ad hyperbolas oppoſitas terminantur.* 1. *De ratione, quam habent rectangula, ſub ſecantium ſegmentis contenta. Primus caſus, quum ſecantes ſunt diametri.*

Atque hic quoque, non ſecus ac in ellipſi, varii ſunt caſus diſtinguendi, pro diverſa qualitate rectarum, quæ ſibi mutuo occurrunt, & utrinque ad curvam terminantur. Primo igitur ſupponemus, rectas illas eſſe *binas diametros*; & *oſtendemus, rectangulum ſub ſegmentis unius eſſe ad rectangulum ſub ſegmentis alterius in duplicata ratione ipſarum diametrorum.*

Sint enim AB, KL duæ quævis hyperbolæ diametri, quæ ſibi mutuo occurrunt in ipſo centro C. Dico, rectangulum ſub ſegmentis FIG. 15.

unius

huius AC, BC, eſſe ad rectangulum ſub ſegmentis alterius KC, LC, ut eſt quadratum diametri AB ad quadratum diametri KL.

Nam, quum utraque diameter ſecta ſit bifariam in centro C; erit in ratione ipſarum AB, KL, tam AC ad KC, quam BC ad LC. Sed rectangulum ACB eſt ad rectangulum KCL in ratione compoſita ex AC ad KC, & ex BC ad LC. Quare ratio eorundem rectangulorum ACB, KCL duplicata erit diametrorum AB, KL.

II. *Secundus caſus, quum ex ſecantibus una quidem eſt diameter, altera eſt ejus ordinata.*

II. Supponemus ſecundo, *ex rectis, ſibi mutuo occurrentibus, unam quidem eſſe diametrum, alteram ordinatam ipſius. Et in iſto caſu rectangulum ſub ſegmentis prioris rectæ erit ad rectangulum ſub ſegmentis alterius rectæ in duplicata ratione ejus, quam habet diameter ad ſuam conjugatam.*

FIG. 15. Sit enim AB diameter aliqua hyperbolæ, cujus KL ſit conjugata; ſitque etiam MO una ex ordinatis ejus diametri, quæ ipſi diametro occurrens in puncto N, utrinque ad hyperbolam terminetur. Dico, rectangulum ANB eſſe ad rectangulum MNO, ut eſt AB quadratum ad KL quadratum.

Nam recta MO, velut ordinata ipſius AB, bifariam ſecta eſt in puncto N. Quare erit MN quadratum æquale rectangulo MNO; & propterea erit, ut rectangulum ANB ad rectangulum MNO, ita idem rectangulum ANB ad MN quadratum. Sed rectangulum ANB eſt ad MN quadratum, ut AB quadratum ad KL quadratum. Igitur in hac eadem ratione erit pariter rectangulum

ANB

Digitized by Google

ANB ad rectangulum MNO.

III. Supponemus tertio, *rectas ſibi mutuo occurrentes eſſe ordinatas, quæ ad duas diametros conjugatas referuntur; oſtendemuſque, rectangulum ſub ſegmentis unius eſſe ad rectangulum ſub ſegmentis alterius in ratione duplicata reciproca ipſarum diametrorum.* III. *Tertius caſus, quum duæ ſecantes ſunt ordinatæ, quæ ad duas diametros conjugatas referuntur.*

Sint namque AB, KL duæ hyperbolæ diametri conjugatæ; ſitque etiam MO ordinata diametri AB, & EF ordinata diametri KL, quæ utrinque ad curvam terminatæ, ſibi mutuo occurrant in puncto H. Dico, rectangulum MHO eſſe ad rectangulum EHF, ut eſt KL quadratum ad AB quadratum. FIG. 15.

Ex puncto E ducatur ad diametrum AB ordinata EG. Et quoniam, propter hyperbolam, KL quadratum eſt ad AB quadratum, tam ut MN quadratum ad rectangulum ANB, quam ut EG quadratum ad rectangulum AGB; erit quoque, ut KL quadratum ad AB quadratum, ita differentia quadratorum MN, EG ad differentiam rectangulorum ANB, AGB.

Jam, propter æquales EG, NH, differentia quadratorum MN, EG eſt æqualis rectangulo MHO. Itemque, quum rectangulum ANB æquale ſit differentiæ quadratorum CA, CN, & rectangulum AGB æquale differentiæ quadratorum CA, CG; erit differentia rectangulorum ANB, AGB æqualis differentiæ quadratorum CG, CN, quæ tantundem valet, ac rectangulum EHF. Unde erit, ut KL quadratum ad AB quadratum, ita rectangulum MHO ad rectangulum EHF.

IV. Sup-

Digitized by Google

IV.

Quartus caſus, quum duarum ſecantium una eſt diameter, & alia ordinata alterius diametri.

Fig. 16. 17.

IV. Supponemus quarto, *ex rectis, ſibi invicem occurrentibus, unam eſſe diametrum, aliam vero ordinatam alterius diametri.* Et quum id contingit, erit rectangulum ſub ſegmentis illius ad rectangulum ſub ſegmentis iſtius, ut eſt quadratum prioris diametri ad quadratum conjugatæ alterius diametri.

Sit enim AB aliqua hyperbolæ diameter, cujus conjugata ſit KL, & MO una ex ejus ordinatis, utrinque ad hyperbolam terminata. Sit porro EF diameter alia, quæ conveniat cum ordinata prioris MO in puncto H. Dico, rectangulum EHF eſſe ad rectangulum MHO, ut eſt EF quadratum ad KL quadratum.

Patet autem, duo hic contingere poſſe. Primo, ut ordinata MO, quæ refertur ad diametrum AB, ſuos terminos habeat in eadem hyperbola. Et ſecundo, ut terminetur ad hyperbolas oppoſitas. In utroque caſu ducantur ex punctis E, H, M rectæ EG, HI, MR, ipſi AB parallelæ, quæ conveniant cum KL in punctis G, I, R. Et, ob triangula æquiangula CEG, CHI, erit, ut CG quadratum ad CI quadratum, ita EG quadratum ad HI, ſeu MR quadratum.

V.

Demonſtratio hujus caſus, quando ordinata ad eandem hyperbolam terminatur.

Fig. 16.

V. Ponamus itaque primo, *ordinatam ſuos terminos habere in eadem hyperbola.* Et quoniam, propter hyperbolam, EG quadratum eſt ad MR quadratum, ut ſumma quadratorum CK, CG ad ſummam quadratorum CK, CR; erit ex æquali, ut CG quadratum ad CI quadratum, ita ſumma quadratorum CK, CG ad ſummam quadratorum CK, CR.

Hinc

Hinc, ſubducendo terminos prioris rationis ex terminis ſecundæ, erit quoque, ut CG quadratum ad CI quadratum, ita CK quadratum ad differentiam inter ſummam quadratorum CK, CR, & CI quadratum. Quumque CG quadratum ſit ad CI quadratum, ut eſt CE quadratum ad CH quadratum; erit rurſus ex æquali, ut CE quadratum ad CH quadratum, ita CK quadratum ad differentiam inter ſummam quadratorum CK, CR, & CI quadratum.

Atque hinc, ſubducendo antecedentes ex conſequentibus, erit ulterius, ut CE quadratum ad differentiam quadratorum CE, CH, ita CK quadratum ad differentiam quadratorum CR, CI. Sed differentia quadratorum CE, CH eſt æqualis rectangulo EHF; & differentia quadratorum CR, CI, ſive MN, NH eſt æqualis rectangulo MHO. Itaque erit, ut CE quadratum ad rectangulum EHF, ita CK quadratum ad rectangulum MHO; & permutando, ut CE quadratum ad CK quadratum, ſive etiam, ut EF quadratum ad KL quadratum, ita rectangulum EHF ad rectangulum MHO.

VI. *Demonſtratio ejuſdem caſus, quando ordinata terminatur ad hyperbolas oppoſitas.* FIG. 17.

VI. Ponamus ſecundo, *ordinatam terminari ad hyperbolas oppoſitas*. Et ſimiliter, quia propter hyperbolam EG quadratum eſt ad MR quadratum, ut rectangulum KGL ad rectangulum KRL; erit ex æquali, ut CG quadratum ad CI quadratum, ita rectangulum KGL ad rectangulum KRL.

Hinc, ex terminis prioris rationis ſubducendo terminos ſecundæ, erit quoque, ut CG

qua-

quadratum ad CI quadratum, ita CK quadratum ad differentiam inter CI quadratum, & rectangulum KRL. Cumque CG quadratum ſit ad CI quadratum, ut eſt CE quadratum ad CH quadratum; erit rurſus ex æquali, ut CE quadratum ad CH quodratum, ita CK quadratum ad differentiam inter CI quadratum, & rectangulum KRL.

Atque hinc, capiendo differentias antecedentium, & conſequentium, erit ulterius, ut CE quadratum ad differentiam quadratorum CE, CH, ita CK quadratum ad differentiam quadratorum CR, CI. Sed differentia quadratorum CE, CH eſt æqualis rectangulo EHF; & differentia quadratorum CR, CI eſt æqualis rectangulo MHO. Itaque erit, ut CE quadratum ad rectangulum EHF, ita CK quadratum ad rectangulum MHO; & permutando, ut CE quadratum ad CK quadratum, ſive etiam, ut EF quadratum ad KL quadratum, ita rectangulum EHF ad rectangulum MHO.

VII. *Poſtremus caſus, quum ſecantes ſunt ordinatæ duarum quarumvis diametrorum.*

VII. Supponemus denique, *rectas duas, ſibi mutuo occurrentes, ordinatas eſſe duarum diametrorum, quæ inter ſe nequaquam ſunt conjugatæ*. Et in iſto caſu rectangula, contenta ſub ſegmentis ipſarum, erunt, ut quadrata, quæ fiunt ex conjugatis earum diametrorum.

Fig. 18. 19.

Sint enim AB, RS duæ quævis diametri, inter ſe nequaquam conjugatæ; ſitque MO una ex ordinatis diametri AB, & PQ una ex ordinatis diametri RS. Conveniant autem inter ſe duæ iſtæ ordinatæ in puncto H. Dico, rectangulum MHO eſſe ad rectangulum PHQ, ut eſt quadratum, quod fit ex con-

juga-

jugata diametri AB, ad quadratum, quod fit ex conjugata diametri RS.

Ducatur namque per punctum H diameter tertia EF. Et quoniam diameter iſta EF ſecat MO, ordinatam diametri AB, in puncto H; erit, ex oſtenſis, ut rectangulum EHF ad rectangulum MHO, ita EF quadratum ad quadratum conjugatæ diametri AB. Cumque eadem EF ſecat pariter PQ, ordinatam diametri RS, in puncto H; erit quoque, ut rectangulum EHF ad rectangulum PHQ, ita EF quadratum ad quadratum conjugatæ diametri RS. Quare ordinando erit, ut rectangulum MHO ad rectangulum PHQ, ita quadratum ex conjugata diametri AB ad quadratum ex conjugata diametri RS.

VIII. Et quidem univerſale theorema, quod hac in re locum habet, hujuſmodi eſt, quod *ſi intra hyperbolas oppoſitas bina ducantur rectæ lineæ, quæ ſeſe mutuo ſecent; rectangula, quæ fiunt ex ſegmentis ipſarum, ſint, ut quadrata ex conjugatis earum diametrorum, ad quas rectæ illæ velut ordinatæ referuntur*. Et omnia alia theoremata, ſuperius oſtenſa, ſunt tantum caſus ſpeciales iſtius.

VIII. *Theorema generale, quod hac in re locum habet, in medium affertur.*

Nam primo, ſi ductæ rectæ lineæ tranſeant per centrum, & ſint hyperbolarum diametri; erunt ipſæmet conjugatæ earum diametrorum, ad quas eædem velut ordinatæ referuntur. Unde, vi ejus theorematis generalis, omnino neceſſe eſt, ut rectangula ſub ſegmentis ipſarum ſint, ut quadrata earundem.

Secundo, ſi una ex iis rectis ſit diameter, & altera ejus ordinata: quemadmodum prior

eſt

Digitized by Google

eſt conjugata illius diametri, ad quam ipſa velut ordinata refertur; ſic conjugata ejus diametri, quæ ſecundam agnoſcit tamquam ſuam ordinatam, eſt conjugata diametri prioris. Quare, per theorema generale, rectangulum ſub ſegmentis diametri ad rectangulum ſub ſegmentis ordinatæ erit, ut quadratum diametri ad quadratum ſuæ conjugatæ.

Tertio, ſi rectæ, ſeſe invicem ſecantes, ſint ordinatæ duarum hyperbolæ diametrorum conjugatarum, non aliæ erunt conjugatæ diametrorum, ad quas rectæ illæ velut ordinatæ referuntur, quam eædem diametri, inverſo ordine ſumptæ. Unde, per theorema generale, rectangula, contenta ſub ſegmentis earum ordinatarum, erunt in ratione reciproca duplicata ſuarum diametrorum.

Denique, ſi una ex iis rectis ſit diameter, & altera ſit ordinata alterius diametri; erit ipſa prior recta conjugata illius diametri, ad quam eadem velut ordinata refertur. Unde, ob theorema generale, rectangulum ſub ſegmentis prioris diametri erit ad rectangulum ſub ſegmentis ordinatæ alterius diametri, ut eſt quadratum diametri prioris ad quadratum conjugatæ alterius diametri.

IX. *Quod idem theorema ſit verum, etiamſi una ex ſecantibus vertitur in tangentem.*

IX. Fieri autem poteſt, ut *una ex ſecantibus tangens evadat*: nimirum, quum puncta duo ſectionis coeunt in unum. In iſto caſu rectangulum ſub ejus ſegmentis vertetur in quadratum ipſius tangentis. Unde inter quadratum iſtud, & rectangulum, ſub alterius ſecantis portionibus contentum, eadem adhuc ratio obtinebit.

Quin

Digitized by Google

Quin etiam *verti poteſt in tangentem utraque ſecans*. Et quum id contingit, ambo quidem rectangula, ſub ſecantium portionibus contenta, abibunt in quadrata ipſarum tangentium. Ex quo fit, ut inter quadrata, quæ ex tangentibus fiunt, eadem pariter ratio debeat locum habere.

Et iſtud quidem jam præcedenti capite ſpeciatim a nobis oſtenſum fuit. Vidimus enim, quod ſi fuerint tangentes duæ AX, EX, ſibi mutuo occurrentes in X; quadrata ipſarum eandem habeant rationem inter ſe, quam quadrata, quæ fiunt ex conjugatis diametrorum AB, EF. FIG. II.

Ad illud vero quod attinet, nec etiam difficile erit, veritatem ejus ſpeciatim oſtendere. Sed diſtinguendi ſunt tamen duo caſus. Primus eſt, quum ſecans eſt parallela diametro, quæ pertinet ad punctum contactus. Alter eſt, quum eadem ſecans ei diametro nequaquam eſt parallela.

X. *Primus caſus, quum ſecans eſt parallela diametro, quæ pertinet ad punctum contactus.* FIG. 20.

X. Ponamus itaque primo, *ſecantem parallelam eſſe diametro, quæ pertinet ad punctum contactus*; adeo nempe, ut exiſtente EH tangente, ſecans ſit recta HO, parallela diametro EF. Jamque in hoc caſu diameter, ad quam recta MO velut ordinata refertur, erit illa eadem, quæ eſt conjugata ipſius EF.

Sit igitur AB conjugata diametri EF. Quumque viciſſim EF ſit conjugata ipſius AB; jam illud oſtendendum nobis erit, ut EH quadratum ſit ad rectangulum MHO, veluti eſt AB quadratum ad EF quadratum. Iſtud autem nullo negotio oſtendemus ſequenti ratione.

Digitized by Google

Ex puncto M ducatur ad diametrum EF ordinata MR. Et quoniam duæ CR, MN inter ſe ſunt æquales; erit etiam CR quadratum æquale quadrato, quod fit ex NM. Sed CR quadratum eſt æquale rectangulo ERF una cum CE quadrato. Et NM quadratum eſt æquale rectangulo MHO una cum NH, ſive eodem CE quadrato. Quare, dempto communi quadrato ex CE, remanebit rectangulum ERF æquale rectangulo MHO.

Quia autem æqualia ſunt quoque quadrata, quæ fiunt ex ipſis MR, EH; erit, ut MR quadratum ad rectangulum ERF, ita EH quadratum ad rectangulum MHO. Sed MR quadratum eſt ad rectangulum ERF, ut AB quadratum ad EF quadratum. Et igitur ex æquali in eadem ratione, quam habet AB quadratum ad EF quadratum, erit quoque EH quadratum ad rectangulum MHO.

XI. *Alter caſus, quum ſecans non eſt parallela diametro, quæ tranſit per punctum contactus.* FIG. 21.

XI. Ponamus ſecundo, *ſecantem haud quidem parallelam eſſe diametro, quæ pertinet ad punctum contactus*: adeo nempe, ut exiſtente EH tangente, ſecans ſit recta HS, quæ occurrit diametro EF. Jamque, ſi KL ſit diameter, ad quam recta TS velut ordinata refertur; oſtendendum erit, EH quadratum eſſe ad rectangulum THS, ut eſt quadratum conjugatæ diametri EF ad quadratum conjugatæ diametri KL.

Ducatur ex puncto H ſecans alia HO, quæ ipſi EF ſit parallela; ſitque AB diameter, quæ ipſam MO velut ſuam ordinatam agnoſcit. Itaque, quum ſecans HO parallela ſit diametro EF, quæ pertinet ad punctum contactus

ctus E ; erit EH quadratum ad rectangulum MHO, ut eſt quadratum conjugatæ diametri EF ad quadratum conjugatæ diametri AB.

Quoniam autem HO, HS ſunt ſecantes duæ, quæ velut ordinatæ referuntur ad diametros AB, KL; erit, ex ſuperius oſtenſis, rectangulum MHO ad rectangulum THS, ut eſt quadratum conjugatæ diametri AB ad quadratum conjugatæ diametri KL. Quare ordinando erit, ut EH quadratum ad rectangulum THS, ita quadratum ex conjugata diametri EF ad quadratum ex conjugata diametri KL.

XII. Speciatim, *quum ſecans eſt diameter hyperbolæ*, veritas ejus, de quo agitur, oſtendi poteſt hoc pacto. Manentibus omnibus, ut ſupra, tranſeat ſecans HO per centrum hyperbolæ. Dico, EH quadratum eſſe ad rectangulum MHO, ut eſt quadratum ex conjugata diametri EF ad quadratum diametri MO. Id vero oſtendemus in hunc modum.

XII. *Demonſtratio ſpecialis, quando ſecans eſt diameter.* FIG. 22.

Sit GI conjugata ipſius EF, ducaturque ex puncto M ad eandem EF ordinata MR. Et quoniam CH quadratum eſt ad CM quadratum, ut CE quadratum ad CR quadratum; ſubducendo antecedentes ex conſequentibus, erit ut CH quadratum ad rectangulum MHO, ita CE quadratum ad rectangulum ERF. Sed, ob hyperbolam, CE quadratum eſt ad rectangulum ERF, ut eſt CG quadratum ad MR quadratum. Itaque erit ex æquali, ut CG quadratum ad MR quadratum, ita CH quadratum ad rectangulum MHO.

Digitized by Google

Quoniam vero MR quadratum eſt ad EH quadratum, ut CM quadratum ad CH quadratum; erit ex æquo perturbando, ut CG quadratum ad EH quadratum, ita CM quadratum ad rectangulum MHO; & permutando, ut CG quadratum ad CM quadratum, ita EH quadratum ad rectangulum MHO. Sed CG quadratum eſt ad CM quadratum, ut GI quadratum ad MO quadratum. Jtaque erit ex æquali, ut EH quadratum ad rectangulum MHO, ita GI quadratum ad MO quadratum.

XIII. *Theorema de ratione, quam habent duæ hyperbolæ tangentes, rurſus oſtenditur.*

XIII. Atque hinc modo nullo negotio oſtendi poteſt, quod *ſi duæ hyperbolæ tangentes ſibi mutuo occurrant, eæ ſint inter ſe, veluti conjugatæ diametrorum, quæ pertinent ad puncta contactus.*

Fig. 23.

Sint enim AH, EH duæ hyperbolæ tangentes, quæ ſibi invicem occurrant in puncto H. Ducantur ex punctis contactus A, & E diametri AB, EF. Dico eſſe, ut AH ad EH, ita conjugata diametri AB ad conjugatam diametri EF.

Ducatur namque diameter alia MO, quæ tranſeat per punctum H. Et quoniam AH eſt tangens, & HO eſt ſecans, tranſiens per centrum; erit, ut AH quadratum ad rectangulum MHO, ita quadratum ex conjugata diametri AB ad quadratum ipſius MO.

Similiter, quia EH eſt tangens, & HO eſt ſecans, tranſiens per centrum; erit, ut rectangulum MHO ad EH quadratum, ita MO quadratum ad quadratum, quod fit ex conjugata diametri EF.

Hinc ex æquo ordinando erit, ut AH qua-

Digitized by Google

quadratum ad EH quadratum, ita quadratum ex conjugata diametri AB ad quadratum ex conjugata diametri EF: & propterea tangentes duæ AH, EH erunt, ut conjugatæ diametrorum AB, EF.

XIV. Cæterum ex iis, quæ hactenus oſtenſa ſunt, prono alveo fluunt ſequentia duo theoremata. XIV. *Alia duo theoremata ex hactenus oſtenſis deducuntur.*

Primum theorema eſt, quod *ſi duabus hyperbolæ tangentibus parallelæ fuerint duæ ſecantes, & conveniant inter ſe, tum tangentes, cum ſecantes; rectangula, ſub ſecantium ſegmentis contenta, ſint proportionalia quadratis, quæ ex tangentibus fiunt.*

Nam diametri, ad quas duæ ſecantes velut ordinatæ referuntur, ſunt illæ eædem, quæ pertinent ad puncta contactus. Quare in eadem illa ratione, quam habent inter ſe quadrata tangentium, erunt quoque rectangula, quæ ſub ſecantium ſegmentis continentur.

Alterum theorema eſt, quod *ſi duabus ſecantibus hyperbolæ parallelæ fuerint binæ aliæ ſecantes, & conveniant inter ſe, tam illæ, quam iſtæ; rectangula ſub ſegmentis illarum ſint proportionalia rectangulis, quæ ſub ſegmentis iſtarum continentur.*

Nam diametri, ad quas duæ poſteriores ſecantes velut ordinatæ referuntur, ſunt illæ eædem, quæ agnoſcunt velut ſuas ordinatas ſecantes priores. Quare in eadem illa ratione, quam habent inter ſe rectangula ſub ſegmentis primarum ſecantium, erunt quoque rectangula ſub ſegmentis aliarum.

C A P. V.

Proprietates, quæ hyperbolæ aſymptotis competunt, in medium afferuntur.

1. *Quæ ſint hyperbolæ aſymptoti, & quod numquam cum ea conveniant.*

I. PErtinet ad hunc locum *doctrina aſymptotorum hyperbolæ, ut quæ ſunt rectæ, quæ hyperbolam contingunt in punctis extremis, ſive infinite a centro diſtantibus*. Primo igitur oſtendemus, qua ratione definiantur rectæ iſtæ, quæ hyperbolæ aſymptoti dicuntur. Tum proprietates, quæ eis competunt, more noſtro proſequemur.

FIG. 24. Hunc in finem referat AB axem hyperbolæ, ſitque KL ejus conjugatus. Deſcribatur circa duos iſtos axes AB, KL parallelogrammum EFGH. Et diagonales hujus parallelogrammi EG, FH, tranſeuntes per centrum C, hyperbolæ aſymptotos nobis exhibebunt.

Sortitæ ſunt autem diagonales iſtæ tale nomen, quia productæ in infinitum, etſi continuo ad hyperbolam accedant, numquam tamen cum ea conveniunt. Nec difficile id erit oſtendere. Nam, ducta ex puncto quovis hyperbolæ M ad axem AB ordinata MN; erit, ut MN quadratum ad rectangulum ANB, ita CK, ſive AE quadratum ad CA quadratum.

Jam vero, ſi eadem ordinata MN conve-

niat

niat cum EG in O, AE quadratum erit ad CA quadratum, ut eſt NO quadratum ad CN quadratum. Quare erit ex æquali, ut MN quadratum ad rectangulum ANB, ita NO quadratum ad CN quadratum: & propterea, quemadmodum rectangulum ANB minus eſt CN quadrato, ita quoque MN quadratum minus erit quadrato, quod fit ex NO; adeoque punctum O erit ultra punctum M.

II. Quod autem *aſymptoti continuo ad hyperbolam accedant*, demonſtratur hoc pacto. Extendatur eadem ordinata MN, uſque donec conveniat cum aſymptoto altera FH in puncto R. Et quemadmodum EH ſecta eſt biſariam in A, ita quoque OR biſecta erit in N: proindeque differentia quadratorum MN, NO erit æqualis rectangulo OMR.

II. Quod aſymptoti continuo ad hyperbolam accedant.

FIG. 24.

Et quoniam in eadem ratione, quam habet AE quadratum ad CA quadratum, eſt, tam MN quadratum ad rectangulum ANB, quam NO quadratum ad CN quadratum; erit quoque, ut AE quadratum ad CA quadratum, ita rectangulum OMR ad idem CA quadratum. Unde rectangulum OMR æquale erit quadrato, quod fit ex AE.

Hinc, quocumque in loco capiatur ordinata MN, ſi ea producatur uſque donec ſecet aſymptotos in punctis O, & R, erit rectangulum OMR ejuſdem ubique magnitudinis. Unde per receſſum ipſius ordinatæ a vertice A, quemadmodum augetur latus unum MR, ita neceſſe eſt, ut minuatur latus alterum MO: & propterea aſymptoti ad hyperbolam continuo accedent.

Digitized by Google

III. *Quod diſtantia inter aſymptotum, & hyperbolam evadit tandem inaſſignabilis.* III. Non igitur in dubium verti poteſt, quod *diſtantia inter aſymptotum, & hyperbolam minor ſemper, ac minor evadat.* Sed oſtendi quoque poteſt; quod *eadem diſtantia eouſque minuatur, ut tandem evadat inaſſignabilis, ſive minor quacumque data recta linea.*

Fig. 24. Capiatur enim ſuper EH portio EI, quæ ſit minor recta linea data. Tum extendatur eadem verſus S, ita ut EI ſit ad AE, ut eſt AE ad IS. Ducatur porro per punctum S recta SR, ipſi CE parallela, quæ conveniat cum CH in puncto R. Ac denique compleatur parallelogrammum SO.

Quia igitur EI eſt ad AE, ut AE ad IS; erit rectangulum EIS æquale quadrato, quod fit ex AE. Sed eidem AE quadrato eſt etiam æquale rectangulum OMR. Quare duo rectangula EIS, OMR æqualia erunt inter ſe.

Ulterius, quemadmodum OR ſecta eſt bifariam in N, ita ES biſecetur in T. Et, ob æquales ES, OR, erunt etiam æquales duæ TE, NO. Unde erit, ut TE quadratum ad rectangulum EIS, ita NO quadratum ad rectangulum OMR; & convertendo, ut TE quadratum ad TI quadratum, ita NO quadratum ad MN quadratum.

Hinc, quum ſit, ut TE ad TI, ita NO ad MN; erit rurſus convertendo, ut TE ad EI, ita NO ad MO. Sed duæ TE, NO ſunt æquales inter ſe. Quare etiam EI ipſi MO æqualis erit: & propterea, quemadmodum EI eſt minor recta linea data, ita quoque eadem data recta linea minor erit ipſa MO.

IV. *Aſymptoto-* IV. Oſtendemus modo proprietates, quæ hy-

hyperbolæ aſymptotis competunt. Et prima quidem proprietas hæc eſt, quod *ſi per aliquod hyperbolæ punctum recta ducatur, uni ex axibus parallela, quæ cum utraque aſymptoto conveniat; rectangulum ſub ejus ſegmentis ſit æquale quadrato, quod fit ex dimidio axis prædicti.* *rum hyperbolæ proprietas principalis oſtenditur.* FIG. 24.

Sint enim AB, KL duo axes hyperbolæ, ſintque etiam EG, FH binæ ejus aſymptoti. Jamque, ſi per aliquod hyperbolæ punctum M ducatur recta OR, parallela axi KL, quæ cum utraque aſymptoto conveniat in punctis O, & R; erit, ex ſuperius oſtenſis, rectangulum OMR æquale quadrato ex AE; & conſequenter æquale etiam quadrato, quod fit ex CK.

Ducatur porro per idem punctum M recta PQ, parallela axi AB, quæ conveniat cum utraque aſymptoto in punctis P, & Q. Oſtendendum eſt, rectangulum PMQ eſſe etiam æquale quadrato, quod fit ex CA. Id vero nullo negotio oſtendemus ſequenti ratione.

Rectangulum OMR ad rectangulum PMQ eſt in ratione compoſita ex MO ad MP, & ex MR ad MQ. Sed MO eſt ad MP, ut AE, ſive CK ad CA. Et MR eſt ad MQ, ut AH, ſive CK ad CA. Quare ratio rectanguli OMR ad rectangulum PMQ duplicata erit ejus, quam habet CK ad CA.

Hinc erit, ut CK quadratum ad CA quadratum, ita rectangulum OMR ad rectangulum PMQ. Sed rectangulum OMR oſtenſum eſt æquale quadrato, quod fit ex CK. Quare etiam rectangulum PMQ erit æquale quadrato, quod fit ex CA.

V. At-

Digitized by Google

V. *Conſectaria, quæ fluunt ex oſtenſa proprietate.* FIG. 25.

V. Atque hinc modo *plura nobis derivantur*. Nimirum primo, quod ſi uni ex axibus, veluti KL, ducantur duæ parallelæ OR, PQ, convenientes cum aſymptotis, & hyperbola; rectangulum ſub ſegmentis unius OMR æquale ſit rectangulo ſub ſegmentis alterius PSQ; quum utrumque ſit æquale quadrato, quod fit ex CK.

FIG. 25. Secundo, quod ſi per eadem hyperbolæ puncta M, & S ducantur duæ quævis aliæ parallelæ TV, XZ, ad utramque aſymptotum pariter terminatæ, rectangulum TMV ſit etiam æquale rectangulo XSZ. Nam rectangulum OMR ad rectangulum TMV rationem habet compoſitam ex MO ad MT, & ex MR ad MV; ſive etiam ex SP ad SX, & ex SQ ad SZ; quum æquiangula ſint, tam triangula OMT, PSX, quam triangula RMV, QSZ. Sed duæ iſtæ rationes componunt pariter rationem, quam habet rectangulum PSQ ad rectangulum XSZ. Quare erit ex æquali, ut rectangulum OMR ad rectangulum TMV, ita rectangulum PSQ ad rectangulum XSZ: & propterea, ſicuti rectangulum OMR eſt æquale rectangulo PSQ, ita quoque rectangulum TMV æquale erit rectangulo XSZ.

FIG. 26. Tertio, quod etſi rectæ MV, SZ non ſint in directum cum rectis MT, SX, modo tamen parallelæ ſint inter ſe, tam iſtæ, quam illæ, ſemper rectangulum TMV ſit æquale rectangulo XSZ. Quum enim adhuc æquiangula ſint, tam triangula OMT, PSX, quam triangula RMV, QSZ; ſemper quidem erit, ut rectangulum OMR ad rectangulum

TMV,

Digitized by Google

TMV, ita rectangulum PSQ ad rectangulum XSZ. Unde, ſicuti rectangulum OMR oſtenſum eſt æquale rectangulo PSQ, ita quoque rectangulum TMV æquale erit rectangulo XSZ.

Et quarto demum, quod, ſi rectæ MT, SX, ad unam aſymptotum ductæ, ſint parallelæ alteri aſymptoto, rectangulum CTM ſit æquale rectangulo CXS. Nam, completis parallelogrammis CM, CS, erit rectangulum TMV æquale rectangulo XSZ. Sed, ob æquales MV, CT, rectangulum TMV eſt æquale rectangulo CTM. Pariterque, ob æquales SZ, CX, rectangulum XSZ eſt æquale rectangulo CXS. Quare erit etiam rectangulum CTM æquale rectangulo CXS. FIG. 26.

VI. *Alia proprietas aſymptotorum hyperbolæ demonſtratur.*

VI. Aſymptotis hyperbolæ competit etiam hæc alia proprietas, quod *portiones cujuſvis rectæ, hyperbola, & aſymptotis interceptæ, inter ſe ſint æquales.*

Maneant enim omnia, ut ſupra, & ducatur utcumque recta OR, quæ tum curvam, cum aſymptotos ſecet. Dico portiones duas MO, SR, hyperbola, & aſymptotis interceptas, æquales eſſe inter ſe. FIG. 27.

Jam enim, ex oſtenſis, rectangulum OMR eſt æquale rectangulo OSR. Sed, ſecta OR biſariam in puncto N, æqualia ſunt quoque quadrata, quæ fiunt ex ipſis NO, NR. Quare erit, ut NO quadratum ad rectangulum OMR, ita NR quadratum ad rectangulum OSR; & convertendo erit etiam, ut NO quadratum ad MN quadratum, ita NR quadratum ad SN quadratum.

Hinc,

Digitized by Google

Hinc, quum ſit, ut NO ad MN, ita NR ad SN; erit rurſus convertendo, ut NO ad MO, ita NR ad SR. Sed duæ NO, NR inter ſe ſunt æquales; quum ex conſtructione tota OR biſecta ſit in puncto N. Quare etiam æquales erunt duæ MO, SR.

VII. *Præcedentis proprietatis conſectarium, definiens tangentis relate ad aſymptotos poſitionem.*

VII. Ex hac autem proprietate prono alveo fluit, quod *ſi recta, ad aſymptotum terminata, bifariam ſecta ſit in puncto, in quo hyperbolæ occurrit, ea ſit tangens ipſius hyperbolæ.*

Fig. 27.

Recta etenim PQ, terminata ad utramque aſymptotum, ſecetur bifariam in puncto T, in quo occurrit hyperbolæ. Dico, eandem rectam PQ contingere hyperbolam in ſolo puncto T.

Si enim fieri poteſt, eadem recta PQ occurrat etiam hyperbolæ in puncto V. Itaque, per oſtenſam proprietatem, duæ PT, QV æquales erunt inter ſe. Sed ex hypotheſi PT eſt æqualis ipſi QT. Quare duæ QV, QT inter ſe erunt æquales. Quod fieri non poteſt.

VIII. *Quod converſum præcedentis conſectarii ſit pariter verum.*

VIII. Ejuſdem proprietatis ope, licebit etiam, *converſum hujus oſtendere*. Nimirum, quod ſi recta PQ, hyperbolam contingens in T, ad utramque aſymptotum terminetur; portiones ejus PT, QT inter ſe ſint æquales.

Fig. 27.

Ducatur enim recta alia OR, ipſi PQ parallela, quæ ſecans hyperbolam in punctis M, & S, cum utraque aſymptoto ſimiliter conveniat. Jamque, ſi per punctum contactus T diameter ducatur, erit ejus ordinata recta MS; adeoque eadem MS a diametro illa bifariam ſecabitur in N.

Quum

Quum igitur æquales ſint inter ſe, tam duæ MO, SR, quam duæ MN, SN; erit tota NO toti NR pariter æqualis. Sed NO eſt ad NR, ut PT ad QT. Quare duæ PT, QT etiam æquales erunt: & propterea tangens PQ biſariam ſecta erit in puncto contactus T.

IX. *Quomodo, determinatis hyperbolæ aſymptotis, duci poſſit tangens ad punctum datum.* Fig. 27.

IX. Atque hinc modo, *determinatis hyperbolæ aſymptotis, nullo negotio ducetur tangens ad aliquod ejus punctum*. Maneant enim omnia, ut ſupra. Et oporteat, tangentem ducere ad punctum hyperbolæ T.

Ducatur ex puncto T recta TX, parallela aſymptoto CH, quæ conveniat cum aſymptoto altera CE in puncto X. Capiatur poſtea ſuper eadem aſymptoto CE portio PX æqualis ipſi CX. Et recta PQ, ducta per punctum T, erit tangens quæſita.

Quum enim ex conſtructione parallelæ ſint rectæ TX, CQ; erit, ut PX ad CX, ita PT ad QT. Sed PX poſita eſt æqualis ipſi CX. Quare etiam PT ipſi QT æqualis erit: & propterea per ea, quæ mox oſtenſa ſunt, recta PT tangens erit hyperbolæ.

X. *Quod duæ hyperbolæ tangentes, ad utramque aſymptotum terminatæ, ſecantur in eadem ratione.* Fig. 28.

X. Ex oſtenſa tangentis proprietate illud etiam conſequitur, quod *ſi duæ hyperbolæ tangentes, ad utramque aſymptotum terminentur, eæ in eadem ratione ſectæ ſint in puncto, in quo ſibi mutuo occurrunt.*

Manentibus namque omnibus, ut ſupra, ſint PQ, EH duæ hyperbolæ tangentes, ad utramque aſymptotum terminatæ. Conveniant autem tangentes iſtæ inter ſe in puncto V. Dico, fore, ut PV ad QV, ita HV ad EV.

Ducantur enim ex punctis contactus T,

& A

& A rectæ TX, AZ aſymptoto CH parallelæ, quæ conveniant cum aſymptoto altera CE in punctis X, & Z. Et quoniam, ex ſuperius oſtenſis, rectangulum CXT eſt æquale rectangulo CZA; erit ut CX ad CZ, ita AZ ad TX.

Quia autem, ob tangentes PQ, EH biſectas in punctis contactus T, & A, rectæ CP, CE ſunt duplæ ipſarum CX, CZ; erit, ut CX ad CZ, ita CP ad CE. Et ſimiliter, quia, ob eaſdem tangentes, rectæ CH, CQ ſunt duplæ ipſarum AZ, TX; erit, ut AZ ad TX, ita CH ad CQ. Unde erit ex æquali, ut CP ad CE, ita CH ad CQ.

Hinc triangula duo PCQ, ECH æqualia erunt inter ſe: proindeque, ablato communi trapetio CEVQ, erit quoque triangulum PEV æquale triangulo QHV. Quumque duo iſta triangula habeant unum angulum uni angulo æqualem; habebunt quoque latera circum æquales iſtos angulos reciproce proportionalia: & propterea erit, ut PV ad QV, ita HV ad EV.

XI. *Tangens hyperbolæ, ad utramque aſymptotum terminata, eſt æqualis conjugatæ diametri, ad punctum contactus pertinentis.* FIG. 28.

XI. Exinde vero conſequitur ulterius, *tangentem hyperbolæ, ad utramque aſymptotum terminatam, æqualem eſſe conjugatæ illius diametri, quæ tranſit per punctum contactus.*

Jam enim oſtenſum eſt, PV eſſe ad QV, ut eſt HV ad EV. Quare, addendo antecedentes conſequentibus, erit, ut PV ad PQ, ita HV ad EH; &, capiendo conſequentium dimidia, erit quoque, ut PV ad PT, ita HV ad HA.

Quoniam autem, dividendo, TV eſt ad PT, ut AV ad HV; capiendo rurſus conſequentium dupla, erit, ut TV ad PQ, ita AV ad

ad EH ; & permutando erit etiam , ut TV ad AV , ita PQ ad EH.

Jam per ea , quæ ſuperius oſtenſa ſunt, TV eſt ad AV , ut eſt conjugata diametri, quæ tranſit per punctum T , ad conjugatam diametri , quæ tranſit per punctum A . Quare ex æquali in hac eadem ratione erit pariter tangens PQ ad tangentem EH .

Atque hoc quidem generaliter verum eſt , ubicumque capiantur puncta contactus T, & A . Quare verum etiam erit, quum punctum A eſt vertex axis hyperbolæ. Sed in iſto caſu tangens EH æqualis eſt axi conjugato . Et igitur etiam tangens altera PQ æqualis erit conjugatæ diametri , quæ tranſit per punctum contactus T .

XII. *Quod aſymptoti ſint diagonales omnium parallelogrammorum, quæ circa conjugatas diametros deſcribuntur.*

XII. Ex quibus modo prono alveo fluit, *aſymptotos eſſe diagonales, non modo ejus parallelogrammi, quod deſcribitur circa axes conjugatos hyperbolæ , verum etiam cujuslibet alterius parallelogrammi , circa duas quaſcumque diametros conjugatas deſcripti.*

Quod quum ita ſit , liquet etiam aſymptotos hyperbolæ determinari poſſe adhibitis, non ſolum axibus , verum etiam duabus quibuſvis aliis diametris conjugatis ; quum diagonales parallelogrammi , deſcripti circa diametros , ſint etiam diagonales parallelogrammi, quod deſcribitur circa axes.

Unde ſequitur quoque , quod ſi per aliquod hyperbolæ punctum recta ducatur , alicui diametro parallela , quæ cum utraque aſymptoto conveniat ; rectangulum , quod ſub ejus ſegmentis continetur , ſit æquale qua-

Digitized by Google

quadrato, quod ſit ex dimidio diametri prædictæ.

XIII. *Cujuſmodi ſit angulus, quem hyperbolæ aſymptoti occurſu mutuo in centro conſtituunt.*

XIII. Illud quoque nolim hic ſilentio præterire, quod *angulus, ſub aſymptotis comprehenſus, ſit rectus, obtuſus, vel acutus, prout axis ipſius hyperbolæ eſt æqualis, minor, vel major ſuo conjugato.*

Fig. 24. Sint enim AB, KL duo axes hyperbolæ, ſintque etiam EG, FH binæ ejus aſymptoti. Dico, angulum ECH, contentum ſub aſymptotis, eſſe rectum, obtuſum, vel acutum, prout axis AB eſt æqualis, minor, vel major conjugato ſuo KL.

Ponamus primo, axes AB, KL æquales eſſe inter ſe. Et quoniam recta EH, quæ hyperbolam contingit in A, eſt æqualis ipſi KL; erunt AB, EH pariter æquales; & conſequenter, tam AE, quam AH ipſi CA æqualis erit. Unde angulus ECH æqualis erit duobus angulis CEH, CHE; atque adeo rectus erit.

Ponamus ſecundo, axem AB minorem eſſe conjugato ſuo KL. Et quoniam tangens EH eſt æqualis ipſi KL; erit AB minor quoque, quam EH; & conſequenter CA minor itidem erit unaquaque ipſarum AE, AH. Unde angulus ECH major erit duobus angulis CEH, CHE: & propterea erit obtuſus.

Ponamus denique, axem AB majorem eſſe ſuo conjugato KL. Et rurſus, quia tangens EH eſt æqualis ipſi KL; erit AB major quoque, quam EH; & conſequenter CA major itidem erit unaquaque ipſarum AE, AH. Unde angulus ECH minor erit duobus angulis CEH, CHE; atque adeo erit acutus.

XIV. Cæ-

Digitized by Google

XIV. Cæterum, quod *aſymptoti ſint rectæ, quæ hyperbolam contingunt in punctis extremis, ſive infinite a centro diſtantibus*, facile quidem erit oſtendere. XIV. *Quod aſymptoti contingant hyperbolam in punctis extremis, ſeu infinite a centro diſtantibus.*

Contingat enim hyperbolam in puncto quovis E recta ET, quæ conveniat cum axe AB in puncto T. Sitque etiam AX recta, quæ eandem hyperbolam contingit in A. Oſtendendum eſt, tangentem ET aſymptotum fieri, ubi punctum contactus E abit in infinitum. FIG. 29

Ut tangens ET aſymptotus fiat, duo quidem requiruntur. Primum eſt, ut punctum T accedat ad centum ipſius hyperbolæ C. Alterum, ut AX æqualis fiat dimidio axis conjugati CK. Unde eo res redit, ut oſtendamus, duo iſta obtineri, quotieſcumque abit in infinitum punctum contactus E.

Ducatur itaque ad axem AB ordinata EG. Et, propter tangentem ET, erit, ut CT ad CA, ita CA ad CG. Sed, abeunte in infinitum puncto E, CA fit infinite minor reſpectu ipſius CG. Quare etiam CT infinite minor erit relate ad CA: & propterea punctum T ad centrum accedet.

Deinde, quum punctum E abit in infinitum, rectangulum AGB non differt ſenſibiliter a quadrato, quod fit ex CG, ſive TG; quum differentia ſit quadratum ex CA, ſive TA, quod evaneſcit relate ad quadratum ex CG, ſive TG. Unde erit, ut EG quadratum ad rectangulum AGB, ita idem EG quadratum ad TG quadratum.

Jam, propter hyperbolam, EG quadratum eſt ad rectangulum AGB, ut CK quadratum

ad CA quadratum. Et, ob triangula æquiangula TGE, TAX, EG quadratum eſt ad TG quadratum, ut AX quadratum ad TA, ſive CA quadratum. Quare erit ex æquali, ut CK quadratum ad CA quadratum, ita AX quadratum ad idem CA quadratum: & propterea duæ AX, CK æquales erunt inter ſe.

XV. *Quod aſymptoti ſint ultimæ hyperbolæ diametri, atque adeo correſpondeant ellipſis diametris æqualibus.*

FIG. 30

XV. Nolim autem hoc loco reticere, *quod eædem aſymptoti conſiderari quoque poſſint veluti ultimæ hyperbolæ diametri: qua ratione iis ellipſis diametris correſpondent, quæ inter ſe ſunt æquales.*

Sint enim AB, KL axes ellipſis, circa quos deſcribatur parallelogrammum EFGH. Ducantur in parallelogrammo iſto diagonales EG, FH. Et quoniam hujuſmodi diagonales dividunt bifariam latera oppoſita alterius parallelogrammi AKBL; per ſuperius oſtenſa, eæ erunt diametri ellipſis æquales.

Verum quidem eſt, quod diametris hiſce non competit illa eadem proprietas, quæ in hyperbolæ aſymptotis obtinet. Ibi enim oſtenſum eſt, quod ſi uni ex axibus, veluti KL, parallela agatur OR, quæ tum hyperbolam, cum aſymptotos ſecet, rectangulum OMR ſit æquale quadrato ex CK. Quod tamen in ellipſi minime locum habet.

Interim, ſi conſideremus, quod rectangulum OMR ſit æquale differentiæ quadratorum MN, NO; ſimile quidpiam etiam in ellipſi comperiemus. Nam ducta hic quoque recta OR, ipſi KL parallela, quæ ſecet tam ellipſim, quam diametros æquales; erit ſumma quadratorum MN, NO æqualis quadrato, quod ſit ex CK.

Digitized by Google

In eadem etenim ratione, quam habet CK, ſive AE quadratum ad CA quadratum eſt, tam MN quadratum ad rectangulum ANB, quam NO quadratum ad CN quadratum. Quare in eadem illa ratione erit quoque ſumma quadratorum MN, NO ad CA quadratum: & propterea duo quadrata MN, NO æqualia erunt quadrato, quod fit ex CK.

CAP. VI.

Proprietates, quæ parabolæ tangentibus, & ſecantibus competunt, oſtenduntur.

I. Complectemur eodem capite proprietates, quæ competunt tangentibus, & ſecantibus parabolæ; quia numero pauciores ſunt, nec adeo longius nos ducent. Ac primo quidem circa tangentes parabolæ jam illud ſuperius oſtenſum eſt, quod *ſi ex vertice alicujus diametri recta ducatur ordinatis ejus parallela, ea tangat parabolam in ſolo illo vertice*. Nunc autem ſubjungemus, quod *in locum, tangente, & parabola contentum, nulla alia cadat recta linea*.

I. Tangentis parabolæ proprietates duæ principales afferuntur.

Sit enim parabola AM, cujus AB ſit diameter aliqua, AD parameter ejus, & DAH recta, ordinatis ejuſdem diametri parallela. Dico, quod ſicuti recta DAH contingit parabolam in ſolo vertice A, ita in locum, contentum tangente, & eadem parabola, nulla alia recta li- FIG. 31.

linea duci poſſit ex eodem vertice A.

Si fieri poteſt, ducatur recta alia AI, in qua ſumpto puncto quovis P, agatur per illud recta PN, ipſi AH parallela, conveniens cum parabola in puncto M. Et quoniam PN quadratum majus eſt MN quadrato; habebit PN quadratum ad AN quadratum majorem rationem, quam MN quadratum ad idem AN quadratum. Sed, propter parabolam, MN quadratum eſt æquale rectangulo DAN. Et rectangulum DAN eſt ad AN quadratum, ut AD ad AN. Quare PN quadratum ad AN quadratum habebit quoque majorem rationem, quam AD ad AN.

Fiat ergo, ut PN quadratum ad AN quadratum, ita AD ad AK, quæ minor erit, quam AN. Tum per punctum K ducatur recta KI, eidem AH parallela, conveniens cum parabola in puncto L. Et quoniam PN quadratum eſt ad AN quadratum, ut IK quadratum ad AK quadratum; erit ex æquali, ut AD ad AK, ita IK quadratum ad AK quadratum. Sed AD eſt ad AK, ut rectangulum DAK ad AK quadratum; ſive etiam, ut LK quadratum ad AK quadratum. Quare erit rurſus ex æquali, ut LK quadratum ad AK quadratum, ita IK quadratum ad idem AK quadratum: & propterea erit LK quadratum æquale quadrato ex IK. Quod fieri non poteſt.

II. *Corollaria, quæ ex duabus præcedentibus proprietatibus conſequuntur.*

II. Quælibet ergo recta linea, quæ ex puncto contactus ducitur infra tangentem, neceſſe eſt, ut primo ſecet parabolam, tum cadat in locum, tangente, & parabola contentum. Hinc autem duo conſequuntur, quæ adi-

aditum nobis aperient ad oſtendendas proprietates omnes, quæ parabolæ tangentibus competunt.

Primum eſt, quod *ad unum, idemque punctum parabolæ nonniſi unica tangens duci poſſit*. Nam, ſi duci poſſent tangentes duæ; jam una caderet in locum, parabola, & tangente altera comprehenſum. Quod quidem oſtenſum eſt fieri non poſſe.

Alterum eſt, quod *ſi recta linea contingat parabolam in puncto aliquo, ea debeat eſſe parallela ordinatis illius diametri, quæ pertinet ad illud punctum*. Nam aliter, ducta ex eo puncto recta alia, ordinatis iis parallela, foret iſta quoque tangens parabolæ; atque adeo ad unum, idemque punctum parabolæ duæ tangentes duci poſſent. Quod fieri nequit.

III. His jactis principiis, facile modo erit *eam primum tangentis proprietatem oſtendere, quæ ei competit, ubi alicui diametro occurrit.* III. *Proprietas tangentis parabolæ, alicui diametro occurrentis.*

Tangens igitur ET, ducta ad punctum E, verticem diametri EF, conveniat cum diametro altera AB in puncto T. Demittatur ad diametrum AB ordinata EG. Et dico, portiones duas AT, AG æquales eſſe inter ſe. FIG. 32

Ducatur enim ad diametrum alteram EF ordinata AO. Et quoniam recta ET contingit parabolam in puncto E, vertice diametri EF; erit ET ipſi AO parallela. Sed diametri AB, EF ſunt itidem æquidiſtantes. Quare TO parallelogrammum erit.

Quum ergo TO parallelogrammum ſit; latera ejus oppoſita AT, EO æqualia erunt inter ſe. Sed, ex ſuperius oſtenſis, EO eſt æqualis ipſi

Digitized by Google

AG. Quare duæ AT, AG inter ſe æquales erunt; adeoque tota TG dupla erit ipſius AG.

IV. *Præcedentis proprietatis converſa demonſtratur.* Fig. 32

IV. Sed facile quoque erit *converſam hujus proprietatis oſtendere*. Nimirum, quod recta ET ſit tangens parabolæ, ſi demiſſa ad diametrum AB ordinata EG, æquales fuerint portiones duæ AT, AG.

Ducatur enim ad diametrum EF ordinata AO. Et, ex ſuperius oſtenſis, erit AG æqualis EO. Sed ipſi AG æqualis ponitur AT. Quare etiam AT eidem EO æqualis erit.

Quum igitur duæ AT, EO ſint æquales, & parallelæ; erunt etiam æquales, & parallelæ duæ ET, AO, quæ illas ad eaſdem partes conjungunt. Unde, quum AO ſit ordinata diametri EF, erit ET tangens parabolæ.

V. *Proprietates tangentium parabolæ ſibi mutuo occurrentium oſtenduntur.* Fig. 32

V. Nunc *eas quidem proprietates oſtendemus, quæ tangentibus parabolæ, ſibi mutuo occurrentibus, competunt*. Hunc in finem ad duo quælibet parabolæ puncta A, & E ducantur tangentes duæ AX, EX, quæ ſibi mutuo occurrant in X; & extendantur eædem, uſque donec conveniant cum diametris AB, EF in punctis L, & T.

Primo igitur utraque tangens bifariam ſecabitur in puncto X. Ducta ſiquidem ad diametrum AB ordinata EG, erunt duæ AT, AG æquales inter ſe. Sed, propter parallelogrammum GL, æquales quoque ſunt duæ AG, EL. Quare erit AT ipſi EL pariter æqualis; & conſequenter æquales erunt, tam duæ AX, LX, quam duæ TX, EX.

Secundo tangentes duæ AX, EX eandem rationem habebunt cum ordinatis EG,

AO,

Digitized by Google

AO. Sunt enim AX, EX ſemiſſes ipſarum AL, ET. Quare erit, ut AX ad EX, ita AL ad ET. Sed AL eſt ad ET, ut EG ad AO. Igitur erit ex æquali, ut AX ad EX, ita EG ad AO.

Denique tangentes duæ AX, EX erunt in ſubduplicata ratione parametrorum, quæ referuntur ad diametros AB, EF. Jam enim, per ſuperius oſtenſa, in hac ratione ſunt ordinatæ EG, AO. Sed AX eſt ad EX, ut EG ad AO. Quare in eadem ſubduplicata ratione earum parametrorum erunt etiam tangentes duæ AX, EX.

VI. *Tangentis parabolæ relate ad axem proprietas quædam ſpecialis demonſtratur.* FIG. 33

VI. Speciatim *relate ad axem competit tangenti parabolæ ſequens proprietas*. Nimirum, quod ſi AB ſit axis parabolæ, AD parameter ejus, & ET aliqua tangens; ducanturque ex puncto contactus E rectæ duæ EG, EH, una perpendicularis ad axem, & altera perpendicularis ad tangentem; quod, inquam, portio axis GH ſit æqualis dimidio parametri AD.

Si enim tangens ET conveniat cum axe AB in puncto T; erit, ex ſuperius oſtenſis, AG æqualis ipſi AT, atque adeo ſemiſſis totius TG. Jam vero EG quadratum eſt æquale; tam rectangulo DAG, propter parabolam; quam rectangulo TGH, ob triangulum TEH, rectangulum in E. Quare, quum duo rectangula DAG, TGH inter ſe ſint æqualia; erit, ut AG ad TG, ita GH ad AD; & conſequenter GH ſemiſſis erit ipſius AD.

VII. *Theorema fundamen-*

VII. Perluſtratis proprietatibus, quæ parabolæ tangentibus competunt; reliquum

Digitized by Google

tale, pro oſtendenda proprietate ſecantium parabolæ.

FIG. 34.

modo eſt, ut quid parabolæ ſecantibus accidat, oſtendamus. Hunc in finem *præmittendum eſt ſequens theorema*, quod ſi AB ſit aliqua parabolæ diameter, cujus AD ſit parameter, & MO una ex ejus ordinatis, utrinque ad parabolam terminata, ducaturque recta EF, diametro parallela, quæ conveniat cum MO in puncto H; quod, inquam, rectangulum MHO ſit æquale rectangulo, quod fit ex AD in EH.

Neque vero difficile erit theorema iſtud oſtendere. Nam, demiſſa ad diametrum AB ordinata EG; erit, tam MN quadratum æquale rectangulo DAN, quam EG, ſive NH quadratum æquale rectangulo DAG. Unde erit quoque differentia quadratorum MN, NH æqualis differentiæ rectangulorum DAN, DAG. Sed differentia quadratorum MN, NH eſt æqualis rectangulo MHO; & differentia rectangulorum DAN, DAG eſt æqualis rectangulo, quod fit ex AD in GN, ſive EH. Quare erit rectangulum MHO æquale rectangulo, quod ſub ipſis AD, EH continetur.

VIII. *Oſtenditur proprietas, quæ parabolæ ſecantibus competit.*

FIG. 34

VIII. Hinc autem ſequitur, quod *ſi intra parabolam binæ ducantur rectæ lineæ, quæ ſeſe mutuo ſecent; rectangula, quæ fiunt ex ſegmentis ipſarum, ſint, ut parametri earum diametrorum, ad quas rectæ illæ velut ordinatæ referuntur.*

Sint enim AB, RS duæ quævis parabolæ diametri; ſitque MO una ex ordinatis diametri AB, & PQ una ex ordinatis diametri RS. Conveniant autem inter ſe duæ iſtæ ordinatæ in puncto H; & ſit AD parameter diametri

Digitized by Google

tri AB, & RK parameter diametri RS. Dico, rectangulum MHO eſſe ad rectangulum PHQ, ut eſt parameter AD ad parametrum RK.

Ducatur namque per punctum H diameter tertia EF, quæ utrique ipſarum AB, RS parallela erit. Et quoniam diameter iſta EF ſecat MO, ordinatam diametri AB, in puncto H; erit, ex oſtenſis, rectangulum MHO æquale rectangulo ex AD in EH. Quumque eadem EF ſecet pariter PQ, ordinatam diametri RS, in puncto H; erit quoque rectangulum PHQ æquale rectangulo ex RK in EH.

Hinc erit, ut rectangulum MHO ad rectangulum PHQ, ita rectangulum ex AD in EH ad rectangulum ex RK in EH. Sed, ob communem altitudinem EH, rectangulum ex AD in EH eſt ad rectangulum ex RK in EH, veluti eſt AD ad RK. Quare erit ex æquali, ut AD ad RK, ita rectangulum MHO ad rectangulum PHQ.

IX. Fieri vero poteſt, ut *una ex ſecantibus tangens evadat*: nimirum, quum puncta duo ſectionis coeunt in unum. In iſto caſu rectangulum ſub ejus ſegmentis vertetur in quadratum ipſius tangentis. Unde inter quadratum iſtud, & rectangulum, ſub alterius ſecantis portionibus contentum, eadem adhuc ratio obtinebit. IX. *Quod eadem proprietas locum habeat, etiamſi, vel una, vel utraque ſecans vertatur in tangentem*

Quin etiam *verti poteſt in tangentem utraque ſecans*. Et quum id contingit, ambo quidem rectangula, ſub ſecantium portionibus contenta, abibunt in quadrata ipſarum tangentium. Ex quo fit, ut inter quadrata, quæ ex tangentibus fiunt, eadem pariter ratio

Digitized by Google

tio debeat locum habere.

Et iſtud quidem jam paulo ante ſpecialiter a nobis oſtenſum eſt. Vidimus enim, quod ſi fuerint tangentes duæ AX,EX, ſibi mutuo occurrentes in X; quadrata ipſarum eandem habeant rationem inter ſe, quam parametri diametrorum AB, EF. Ad illud vero quod attinet, nec etiam difficile erit, veritatem ejus ſpeciatim oſtendere.

FIG. 32.

X. *Demonſtratio, quando duarum rectarum una eſt tangens, altera ſecans.* FIG. 35

X. Sit enim EH tangens, & HO ſecans; ſitque etiam EF diameter, quæ pertinet ad punctum contactus E, & RS diameter, ad quam recta MO velut ordinata refertur. *Oſtendendum eſt*, EH quadratum eſſe ad rectangulum MHO, ut eſt parameter diametri EF ad parametrum diametri RS.

Ducatur ex puncto H recta HL, diametris parallela, quæ parabolæ occurrat in L. Tum ex puncto L demittatur ad diametrum EF ordinata LK. Et quoniam HL ſecat MO, ordinatam diametri AB, in puncto H; erit, ex oſtenſis, rectangulum MHO æquale rectangulo ex HL, ſive EK in parametrum diametri RS.

Jam vero, propter parabolam, LK, ſive EH quadratum eſt æquale rectangulo, quod fit ex eadem EK in parametrum diametri EF. Quare erit, ut EH quadratum ad rectangulum MHO, ita parameter diametri EF ad parametrum diametri RS.

XI. *Demonſtratio, quando utraque rectarum eſt tangens.*

XI. Atque hinc modo alia ratione oſtendi poteſt, quod *ſi duæ parabolæ tangentes ſibi mutuo occurrant, eæ ſint inter ſe in ſubduplicata ratione parametrorum, pertinentium*

Digitized by Google

tium ad diametros, quæ tranſeunt per puncta contactus.

Sint enim AH, EH duæ parabolæ tangentes, quæ ſibi invicem occurrant in puncto H. Ducantur ex punctis contactus A, & E diametri AB, EF. Dico, eſſe AH ad EH in ſubduplicata ratione parametrorum, quæ referuntur ad diametros AB, EF. FIG. 35.

Ducatur namque ſecans quævis MO, quæ tranſeat per punctum H, ſitque RS diameter, ad quam ipſa MO velut ordinata refertur. Et quoniam AH eſt tangens, & HO eſt ſecans; erit AH quadratum ad rectangulum MHO, ut eſt parameter diametri AB ad parametrum diametri RS.

Similiter, quia EH eſt tangens, & HO eſt ſecans; erit rectangulum MHO ad EH quadratum, ut eſt parameter diametri RS ad parametrum diametri EF. Quare ex æquo ordinando erit, ut AH quadratum ad EH quadratum, ita parameter diametri AB ad parametrum diametri EF: & propterea tangentes duæ AH, EH erunt in ſubduplicata ratione earum parametrorum.

XII. Ex iis autem, quæ hactenus oſtenſa ſunt, prono alveo fluunt ſequentia duo theoremata. XII. *Theoremata duo, quæ ex hactenus oſtenſis deducuntur.*

Primum theorema eſt, quod *ſi duabus parabolæ tangentibus parallelæ fuerint duæ ſecantes, & conveniant inter ſe, tum tangentes, cum ſecantes; rectangula, ſub ſecantium ſegmentis contenta, ſint proportionalia quadratis, quæ ex tangentibus fiunt.*

Nam

Nam diametri, ad quas duæ ſecantes velut ordinatæ referuntur, ſunt illæ eædem, quæ pertinent ad puncta contactus. Quare in eadem illa ratione, quam habent inter ſe quadrata tangentium, erunt quoque rectangula, quæ ſub ſecantium ſegmentis continentur.

Alterum theorema eſt, quod *ſi duabus ſecantibus parabolæ parallelæ fuerint binæ aliæ ſecantes, & conveniant inter ſe, tam illæ, quam iſtæ; rectangula ſub ſegmentis illarum ſint proportionalia rectangulis, quæ ſub ſegmentis iſtarum continentur.*

Nam diametri, ad quas duæ poſteriores ſecantes velut ordinatæ referuntur, ſunt illæ eædem, quæ agnoſcunt velut ſuas ordinatas ſecantes priores. Quare in eadem illa ratione, quam habent inter ſe rectangula ſub ſegmentis primarum ſecantium, erunt quoque rectangula ſub ſegmentis aliarum.

XIII. *Proprietates tangentium, & ſecantium parabolæ, ex iis, quæ obtinent in ellipſi, & hyperbola deducuntur.*

XIII. Cæterum oſtendendum modo eſſet, *qua ratione proprietates, quæ pertinent ad tangentes, & ſecantes, tum hyperbolæ, cum ellipſis, vertantur in eas, quæ parabolæ tangentibus, & ſecantibus competant*. Sed ſatis erit, transmutationem iſtam in iis tantum oſtendere, quæ reliquarum omnium ſunt baſis, & fundamentum.

FIG. 2. 11.

Nimirum primo, tam in ellipſi, quam in hyperbola oſtenſum eſt, quod ſi ET ſit tangens, conveniens cum diametro AB in puncto T, & EG ſit diametri ejus ordinata, CG ſit ad CA, ut eſt CA ad CT. Jam, capiendo differentias antecedentium, & conſequentium,

tium, erit quoque, ut AG ad CA, ita AT ad CT: & propterea, abeunte in infinitum centro C, quemadmodum æquales fiunt duæ CA, CT, ita quoque æquales erunt duæ AG, AT.

Deinde, ſi duæ rectæ ſeſe mutuo ſecent, ſive in ellipſi, ſive in hyperbola; erunt rectangula ſub ſegmentis ipſarum, ut quadrata ex conjugatis earum diametrorum, ad quas rectæ illæ velut ordinatæ referuntur; & conſequenter in ratione compoſita ex iiſdem diametris, & parametris earundem.

Jam, abeunte in infinitum centro, ſive ellipſis, ſive hyperbolæ, ratio earum diametrorum evadit æqualitatis, quum ipſæ diametri fiant infinitæ longitudinis, ac differentes inter ſe mutuo per differentiam finitam. Quare rectangula, contenta ſub ſegmentis earum rectarum, erunt in ſola ratione parametrorum, pertinentium ad diametros, ad quas eædem illæ rectæ velut ordinatæ referuntur.

LI-

LIBER VI.

De Focis, ſeu Umbilicis Sectionum Conicarum.

Intra conicas ſectiones dantur puncta nonnulla, ad quæ puncta ipſarum ſectionum quum referuntur, plures alias, eaſque non contemnendas proprietates ſortiuntur. Puncta iſta vocavit Apollonius puncta comparationum. Sed, ob ſpeciale ipſorum accidens, quod conicas ſectiones uſibus opticis inſervientes nobis oſtendit, eadem puncta foci, ſive umbilici a Recentioribus dicuntur. Proprietates ergo, quæ conicis ſectionibus competunt, relate ad focos, ſeu umbilicos, hoc libro oſtendendæ nobis erunt.

C A P. I.

Focorum ellipſis proprietates generales oſtenduntur.

I. *Definitio focorum ellipſis, & quod a qualiter diſtent, tum a centro, tum a verticibus.* FIG. 36

I. Ellipſis foci, ſive umbilici dicuntur *duo illa puncta axis majoris, quibus ordinatæ correſpondentes ſemiſſem parametri ejuſdem axis adæquant.*

Ita, ſi AB ſit axis major ellipſis, & AD parameter ejus, capianturque in axe illo AB duo puncta G, & H adeo quidem, ut ordinatæ

Digitized by Google

tæ EG, FH, punctis illis correſpondentes, adæquent ſemiſſem ipſius AD; dicentur puncta G, & H foci, ſive umbilici ipſius ellipſis.

Unde liquet focos G, & H æqualiter diſtare, tam a centro ellipſis C, quam ab axis verticibus A, & B. Nam, quemadmodum æqualia ſunt quadrata EG, FH; ita quoque æqualia erunt rectangula AGB, AHB, quæ iis quadratis proportione correſpondent.

Hinc, ſubducendo æqualia iſta rectangula AGB, AHB ex æqualibus quadratis CA, CB, remanebit quadratum ex CG æquale quadrato ex CH: & propterea æquales erunt inter ſe, tam duæ CG, CH, quam duæ AG, BH.

II. Focorum ellipſis proprietas prima generalis.

FIG. 36.

II. Ex ipſa autem focorum definitione liquet, *rectangulum ſub axis portionibus, per focorum alterum abſciſſis, quadrantem figuræ ejuſdem axis adæquare.* Maneant enim omnia, ut ſupra. Dico, tam rectangulum AGB, quam rectangulum AHB æquale eſſe quartæ parti figuræ axis AB, quæ conſtituitur per rectangulum DAB.

Nam, propter ellipſim, EG quadratum eſt ad rectangulum AGB, ut AD ad AB; ſive etiam, ut AD quadratum ad rectangulum DAB. Sed EG quadratum eſt quarta pars quadrati, quod fit ex AD; quum ex conſtructione EG ſemiſſem adæquet ipſius AD. Quare etiam rectangulum AGB quarta pars erit rectanguli DAB.

Eadem ratione, propter ellipſim, FH quadratum eſt ad rectangulum AHB, ut AD ad AB; ſive etiam, ut AD quadratum ad rectangulum DAB. Sed FH quadratum eſt quar-

Digitized by Google

quarta pars quadrati, quod ſit ex AD; quum ex conſtructione FH ſemiſſem adæquet ipſius AD. Quare etiam rectangulum AHB quarta pars erit rectanguli DAB.

III. *Focorum ellipſis proprietas ſecunda generalis.* Fig. 37.

III. Ducantur nunc ad vertices A, & B tangentes AX, BZ, quæ conveniant cum tangente quavis tertia XMZ in punctis X, & Z. Et *facile erit oſtendere*, quod ſi ex focorum altero G ducantur rectæ GX, GZ, angulus XGZ, ſub ipſis comprehenſus, perpetuo rectus eſſe debeat, ubicunque fuerit punctum contactus M.

Nam rectangulum ex AX in BZ, velut æquale quadrato, quod fit ex dimidio axis conjugati, adæquat quartam partem figuræ axis AB. Sed ejuſdem figuræ quadranti æquale eſt quoque rectangulum AGB. Quare erit rectangulum ex AX in BZ æquale rectangulo AGB: & propterea erit, ut AX ad AG, ita BG ad BZ.

Hinc duo triangula rectangula XAG, GBZ æquiangula erunt; adeoque erit angulus AXG æqualis angulo BGZ. Et, appoſito communi AGX, erunt etiam duo anguli AXG, AGX æquales duobus angulis BGZ, AGX, Sed priores duo unum rectum adæquant. Quare uni recto pariter æquales erunt poſteriores duo; & conſequenter angulus XGZ etiam rectus erit.

IV. *Focorum ellipſis proprietas tertia generalis.* Fig. 37.

IV. Eadem autem ratione oſtendemus, rectum eſſe angulum XHZ, quem continent rectæ HX, HZ, ductæ ex foco altero H ad eadem puncta X, & Z. Unde *ſequitur quoque*, quod ſi ex puncto K, in quo rectæ duæ GZ, HX

HX ſe mutuo ſecant, ducatur ad punctum contactus M recta KM, hæc perpendicularis ſit ad tangentem XZ.

Si enim fieri poteſt, ſit KO perpendicularis ad XZ. Et quoniam rectus eſt, tam angulus XGZ, quam angulus XHZ; ſemicirculus, deſcriptus ſuper XZ, velut diametro, tranſibit per focos G, & H. Unde erit angulus HGZ æqualis angulo HXZ. Sed angulus HGZ æqualis eſt angulo AXG. Quare duo anguli AXG, HXZ æquales erunt inter ſe: & propterea, ob triangula æquiangula AGX, OKX, erit, ut AX ad OX, ita GX ad KX.

Simili ratione oſtendemus, BZ eſſe ad OZ, ut eſt HZ ad KZ. Unde, quia propter triangula æquiangula KGX, KHZ, GX eſt ad KX, ut HZ ad KZ; erit ex æquali, ut AX ad OX, ita BZ ad OZ; & permutando erit quoque, ut AX ad BZ, ita OX ad OZ.

Jam per ea, quæ ſuperius oſtenſa ſunt, in eadem ratione, qua eſt tangens AX ad tangentem MX, eſt etiam tangens BZ ad tangentem MZ. Quare erit ex æquali, ut AX ad MX, ita BZ ad MZ; & permutando erit etiam, ut AX ad BZ, ita MX ad MZ.

Quum igitur in eadem ratione rectarum AX, BZ ſit, tam OX ad OZ, quam MX ad MZ; erit rurſus ex æquali, ut OX ad OZ, ita MX ad MZ. Unde componendo erit, ut XZ ad OZ, ita XZ ad MZ: & propterea duæ OZ, MZ æquales erunt inter ſe. Quod fieri non poteſt.

V. Atque hinc *ſequitur etiam*, rectas MG, V. *Focorum*

ellipſis proprietas quarta generalis.

FIG. 37.

MH, quæ ex puncto contactus M ad focos inclinantur, æquales cum tangente XZ angulos conſtituere, hoc eſt angulum GMX æqualem eſſe angulo HMZ.

Quum enim rectus ſit, tam angulus KGX, quam angulus KMX; ſemicirculus, deſcriptus ſuper KX, velut diametro, tranſibit per puncta G, & M: proindeque erit angulus GMX æqualis angulo GKX.

Eadem ratione, quia rectus eſt uterque angulorum KHZ, KMZ; ſemicirculus, deſcriptus ſuper KZ, velut diametro, tranſibit per puncta H, & M. Quare erit angulus HMZ æqualis angulo HKZ.

Quemadmodum igitur angulo GKX æqualis eſt angulus GMX, ita angulo HKZ æqualis eſt angulus HMZ. Sed duo anguli GKX, HKZ inter ſe ſunt æquales. Quare etiam inter ſe æquales erunt duo anguli GMX, HMZ.

VI.

Focorum ellipſis proprietas quinta generalis.

FIG. 37.

VI. Inde vero *deducitur præterea*, eaſdem rectas MG, MH continere rectangulum, quod quartam partem adæquat figuræ diametri, tranſeuntis per punctum contactus M.

Nam, ex ſuperius oſtenſis, ſi ex centro ellipſis C ad puncta X, & Z intelligantur ductæ rectæ CX, CZ, eæ exhibebunt nobis duas ellipſis diametros conjugatas. Quare rectangulum XMZ æquale erit quadrato, quod fit ex dimidio conjugatæ illius diametri, quæ pertinet ad punctum M.

Jam quadratum iſtud adæquat quartam partem figuræ ejuſdem diametri. Unde conſtabit, rectangulum GMH æquale eſſe quadran-

Digitized by Google

dranti figuræ diametri, tranſeuntis per punctum M, ſi utique oſtendi poſſit, rectangulum GMH æquale eſſe rectangulo XMZ. Id vero oſtendemus in hunc modum.

Quoniam rectus eſt uterque angulorum KGX, KMX; erunt alii duo anguli GKM, GXM duobus rectis æquales: proindeque, quum duobus rectis ſint etiam æquales anguli duo GKM, MKZ; ablato communi GKM, remanebit angulus GXM æqualis angulo MKZ.

Jam, ob circulum, tranſeuntem per quatuor puncta M, K, H, Z, angulus MKZ æqualis eſt angulo MHZ. Quare etiam angulus GXM æqualis erit angulo MHZ. Unde triangula duo GMX, HMZ æquiangula erunt: & propterea, quum ſit, ut MX ad MG, ita MH ad MZ; erit rectangulum GMH æquale rectangulo XMZ.

VII. Exinde *colligitur pariter*, eaſdem rectas MG, MH ſimul ſumptas æquales eſſe axi AB. Ducantur enim uni earum, veluti MG, parallelæ CR, HS. Tum jungantur rectæ AR, HR, BR.

VII. *Focorum ellipſis proprietas ſexta generalis.* FIG. 38.

Et quoniam eidem angulo GMX æqualis eſt, tam angulus HMS, quam angulus HSM, erunt duo anguli HMS, HSM æquales inter ſe: & propterea triangulum MHS iſoſceles erit. Sed baſis ejus MS biſecta eſt per rectam HR; quum ſit, ut RM ad RS, ita CG ad CH. Quare erit HR perpendicularis ad ipſam MS.

Hinc, ob circulum, tranſeuntem per quatuor puncta A, H, R, X, erit angulus

Digitized by Google

ARX æqualis angulo AHX. Et ſimiliter, ob circulum, tranſeuntem per puncta quatuor B, H, R, Z, erit angulus BRZ æqualis angulo BHZ. Unde angulus ARB æqualis erit angulo XHZ; atque adeo rectus erit.

Id quum ita ſit, ſemicirculus, deſcriptus ſuper AB, velut diametro, tranſibit per punctum R: & propterea recta CR ipſi CA, vel CB æqualis erit. Sed, ob rectam GH biſectam in C, eſt MG dupla ipſius CI, & MH dupla ipſius MI, ſive IR. Itaque ſumma duarum MG, MH dupla erit totius CR; atque adeo æqualis axi AB.

VIII. *Alia ellipſim in plano deſcribendi ratio, datis axe, & umbilicis.* Fig. 37.

VIII. Hinc *vero alia nobis ſuboritur ratio deſcribendi ellipſim in plano, datis focis cum longitudine axis majoris*. Sit enim AB axis major ellipſis, ſintque puncta G, & H ejuſdem foci, ſeu umbilici. Oportet, in ſubjecto plano ellipſim deſcribere.

Capiatur filum ejuſdem longitudinis cum axe AB, & extrema ejus focis G, & H alligentur. Deinde ope alicujus ſtili circumducatur filum circa focos ea lege, ut portiones ejus maneant continuo tenſæ. Dico, curvam, quæ per ſtilum in ſubjecto plano deſcribitur, eſſe ellipſim quæſitam.

Jam enim ex ipſa curvæ deſcriptione liquet, ejus naturam hanc eſſe, ut ſumma rectarum, quæ ex aliquo ejus puncto ducuntur ad puncta G, & H, adæquet longitudinem fili. Sed ex conſtructione filum eſt ejuſdem longitudinis cum axe majore AB. Quare eadem ſumma rectarum æqualis erit axi AB; & propterea curva deſcripta erit ellipſis.

Per-

Digitized by Google

Perſpicuum eſt autem, quod ſi foci G, & H accedant ad punctum C, quod biſecat axem AB, deſcripta curva ſit circuli circumferentia. Unde ſequitur, *circulum conſiderari poſſe, veluti ellipſim, cujus foci coeunt cum ipſo centro.*

IX. Sit nunc recta MT aliqua tangens ellipſis, conveniens cum axe AB in puncto T. Erigatur ſuper ea perpendicularis MO, eidem axi occurrens in O. Et *circa perpendicularem iſtam plura licebit oſtendere.* IX. *Proprietates, pertinentes ad perpendicularem, quæ ex puncto contactus ducitur ad tangentem.* Fig. 39.

Nimirum primo, quod ea biſecet angulum GMH. Nam rectæ MG, MH conſtituunt cum tangente angulos æquales. Sed æquales quoque ſunt anguli, quos cum eadem tangente conſtituit perpendicularis MO. Quare erit angulus GMO æqualis angulo HMO.

Secundo, quod recta TH ſit harmonice ſecta in punctis G, & O. Nam rectæ MG, MH, ob æquales angulos, quos conſtituunt cum tangente MT, ſunt, ut perpendicula, quæ ex punctis G, & H ad tangentem demittuntur, ſive etiam, ut rectæ TG, TH. Sed, ob angulum GMH biſectum per rectam MO, eædem ſunt quoque, ut portiones GO, HO. Igitur erit ex æquali, ut TG ad TH, ita GO ad HO: & propterea rectangulum, quod ſit ex tota TH in portionem intermediam GO, æquale erit rectangulo ſub portionibus extremis TG, HO.

Tertio, quod tres rectæ CO, CG, CT ſint continue proportionales. Quum enim rectangulum ex TH in GO ſit æquale rectangulo ex TG in HO; erit, ut TH ad TG, ita

Digitized by Google

HO ad GO; & componendo, ut ſumma duarum TH, TG ad TG, ita GH ad GO; & capiendo antecedentium dimidia, ut CT ad TG, ita CG ad GO; ac denique convertendo, ut CT ad CG, ita CG ad CO.

Quarto, quod ſi demittatur ad axem ordinata MN, data ſit ratio, quam habet CO ad CN, hoc eſt æqualis duplicatæ ejus, quam habet CG ad CA. Quum enim tres rectæ CT, CG, CO ſint continue proportionales; erit CG quadratum æquale rectangulo TCO. Sed, ex ſuperius oſtenſis, CA quadratum eſt æquale rectangulo TCN. Quare erit, ut rectangulum TCO ad rectangulum TCN, ſive etiam ut CO ad CN, ita CG quadratum ad CA quadratum.

Denique, quod data ſit etiam ratio, quam habet CO ad NO, hoc eſt æqualis ei, quam habet CG quadratum ad rectangulum AGB. Jam enim CO eſt ad CN, ut eſt CG quadratum ad CA quadratum. Sed, ex ſuperius oſtenſis, CN eſt ad NO, ut axis AB ad parametrum ejus AD; ſive etiam, ut AB quadratum ad rectangulum DAB; ſive demum, ut CA quadratum ad rectangulum AGB. Quare ex æquo ordinando erit, ut CO ad NO, ita CG quadratum ad rectangulum AGB.

X. *Ejuſdem perpendicularis ſingularis quædam proprietas oſtenditur.* FIG. 39.

X. Meretur autem, ut *ſpeciatim oſtendatur ſequens proprietas*: nimirum, quod ſi ex puncto O ſuper aliquam ipſarum MG, MH perpendicularis demittatur OR, abſciſſa portio MR ſit æqualis dimidio parametri axis majoris AD.

Nec ſane difficile erit eam oſtendere.

Nam

Nam rectæ MG, MH, ob æquales angulos, quos conſtituunt cum tangente MT, ſunt, ut perpendicula, quæ ex punctis G, & H ad tangentem demittuntur; ſive etiam, ut portiones TG, TH. Quare componendo ſumma rectarum MG, MH, ſive axis AB, erit ad MH, ut ſumma duarum TG, TH ad ipſam TH; & capiendo antecedentium dimidia erit quoque, ut CA ad MH, ita CT ad TH; ac denique permutando erit, ut CA ad CT, ita MH ad TH.

Demittatur jam ex puncto H ſuper tangentem perpendicularis HL. Et MH ad TH erit in ratione compoſita ex MH ad HL, & ex HL ad TH. Jam vero MH eſt ad HL, ut MO ad MR. Itemque HL eſt ad TH, ut MO ad TO; ſive etiam, ut NO ad MO. Quare erit MH ad TH in ratione compoſita ex NO ad MO, & ex MO ad MR; atque adeo in ſimplici ratione, quam habet NO ad MR.

Quum igitur CA ſit ad CT, ut MH ad TH, & MH ſit ad TH, ut NO ad MR; erit ex æquali, ut CA ad CT, ita NO ad MR. Sed CA eſt ad CT, ut CN ad CA. Quare rurſus ex æquali erit, ut CN ad CA, ita NO ad MR; & permutando erit pariter, ut CN ad NO, ita CA ad MR. Eſt autem ex oſtenſis, ut CN ad NO, ita AB ad AD. Et igitur ex æquali rurſus erit, ut AB ad AD, ita CA ad MR: proindeque, ſicuti CA ſemiſſis eſt ipſius AB, ita erit MR ſemiſſis ipſius AD.

XI. Præterea *pertinet ad focos ellipſis hæc alia proprietas*, quod ſi duæ tangentes MK, NK conveniant in K, & ex eodem foco G du- XI. *Focorum ellipſis alia proprietas generalis.* Fig. 40.

Digitized by Google

ducantur ad puncta contactus rectæ GM, GN, angulus MGN biſariam ſit ſectus per rectam GK.

Jungantur enim puncta M, & N per rectam MN, cui per focum G, & centrum C parallelæ agantur OR, XZ, cum tangentibus convenientes. Jungantur quoque rectæ HM, HN; & conveniat cum axe, tangens quidem MK in puncto T, tangens vero NK in puncto S.

Et quoniam HM eſt ad GM, ut TH ad TG; erit componendo, ut AB ad GM, ita ſumma duarum TH, TG ad ipſam TG; & capiendo antecedentium dimidia erit quoque, ut CA ad GM, ita CT ad TG. Sed CT eſt ad TG, ut CX ad GO. Quare erit ex æquali, ut CA ad GM, ita CX ad GO.

Eadem ratione oſtendemus, CA eſſe ad GN, ut eſt CZ ad GR. Unde, quia GM eſt ad GN in ratione compoſita ex GM ad CA, & ex CA ad GN; habebit quoque GM ad GN rationem compoſitam ex GO ad CX; & ex CZ ad GR.

Jam diameter, quæ biſecat rectam MN, eamque velut ſuam ordinatam agnoſcit, tranſire debet per punctum K, in quo tangentes duæ MK, NK ſibi mutuo occurrunt. Quare eadem diameter biſecabit quoque rectam XZ: & propterea, quum æquales ſint duæ CX, CZ; erit GM ad GN in ſimplici ratione, quam habet GO ad GR.

Ponamus modo, rectam GK ipſi MN occurrere in L. Et quoniam GO eſt ad GR, ut ML ad NL; erit ex æquali, ut GM ad GN,

GN, ita ML ad NL: proindeque angulus MGN ſectus erit bifariam per rectam GK.

XII. *Theorema de longitudine rectæ, per focorum alterum tranſeuntis.* Fig. 41.

XII. Sed *hanc aliam proprietatem nec etiam ſilentio præteribimus*, quod ſi per focum aliquem G ducatur recta MN, utrinque ad ellipſim terminata; ea ſit tertia proportionalis poſt axem AB, & diametrum KL, ipſi MN parallelam.

Ducantur enim ad puncta M, & N tangentes MT, NS, convenientes cum axe AB in punctis T, & S, cumque diametro KL in punctis X, & Z. Tum ex iiſdem punctis M, & N demittantur ad diametrum KL ordinatæ MO, NR.

Et quoniam, ut paulo ante vidimus, CA eſt ad GM, ut CT ad TG; erit quoque, ut CA ad GM, ita CX ad eandem GM. Quare duæ CA, CX æquales erunt inter ſe. Quumque eadem ratione etiam CZ ipſi CA æqualis comperiatur, erit tota XZ æqualis axi AB.

Quia autem tangens MX occurrit diametro KL in puncto X, & ex puncto contactus M ducta eſt ad eandem diametrum ordinata MO; erit, ut CX ad CK, ita CK ad CO; & duplicando terminos omnes, erit quoque, ut XZ ad KL, ita KL ad OR.

Jam, quemadmodum XZ eſt æqualis axi AB, ita OR æqualis eſt rectæ MN. Quare erit, ut AB ad KL, ita KL ad MN: & propterea recta MN, ducta per focum G, & utrinque ad ellipſim terminata, erit tertia proportionalis poſt axem AB, & diametrum KL, ipſi MN parallelam.

XIII. *Coroll.*

XIII. Hinc autem *prono alveo fluit*, quod ſi per

rium, quod ex præcedenti theoremate deducitur.

FIG. 41.

ſi per eundem focum, vel etiam per utrumque ducantur rectæ duæ MN, PQ, utrinque ad ellipſim terminatæ; eæ ſint inter ſe, ut quadrata diametrorum, quæ ipſis ſunt parallelæ.

Quum enim MN ſit tertia proportionalis poſt axem AB, & diametrum KL, ipſi MN parallelam; erit KL quadratum æquale rectangulo ex AB in MN. Et eadem ratione, quia PQ eſt tertia proportionalis poſt axem AB, & diametrum EF, ipſi PQ æquidiſtantem; erit EF quadratum æquale rectangulo ex AB in PQ.

Inde autem erit, ut KL quadratum ad EF quadratum, ita rectangulum ex AB in MN ad rectangulum ex AB in PQ. Sed, ob communem altitudinem AB, rectangulum ex AB in MN eſt ad rectangulum ex AB in PQ, ut MN ad PQ. Quare erit ex æquali, ut MN ad PQ, ita KL quadratum ad EF quadratum.

Quum igitur, ex ſuperius oſtenſis, rectangula, quæ fiunt ex ſegmentis duarum ſecantium, ſint inter ſe, ut quadrata ex conjugatis earum diametrorum, ad quas ſecantes illæ velut ordinatæ referuntur; erunt nunc illa eadem rectangula, ut earundem diametrorum ordinatæ illæ, quæ tranſeunt per focos.

XIV.

Focorum ellipſis ultima proprietas generalis.

FIG. 42.

XIV. Denique *hanc quoque proprietatem nolumus ſilentio committere*, quod ſi recta XZ ellipſim contingat in M, & ducta ex focorum altero G ad punctum contactus M recta GM, huic per vertices axis parallelæ agantur AX, BZ, cum tangente convenientes; quod, inquam, demiſſa ad axem ordinata MN, ſint

ipſæ

Digitized by Google

ipſæ AX, BZ æquales portionibus axis AN, BN.

Extendatur enim tangens MX, uſque donec conveniat cum axe AB in puncto T. Et, ut paulo ſuperius oſtenſum eſt, CA erit ad GM, ut eſt CT ad TG. Sed ducta CL ipſi GM parallela, GT eſt ad TG, ut CL ad GM. Igitur erit ex æquali, ut CA ad GM, ita CL ad eandem GM: & propterea CL ipſi CA æqualis erit.

Jam, ob tangentem MT, CT eſt ad CA, ut CA ad CN. Quare convertendo erit, ut CT ad AT, ita CA, ſive CL ad AN; & permutando, ut CT ad CL, ita AT ad AN. Sed CT eſt ad CL, ut AT ad AX. Et igitur ex æquali erit, ut AT ad AX, ita AT ad AN: proindeque AX ipſi AN æqualis erit.

Erigantur deinde ex punctis A, & B perpendicula AI, BK. Et quoniam in eadem illa ratione, quam habet AI ad MI, eſt etiam BK ad MK; erit ex æquali, ut AI ad MI, ita BK ad MK; & permutando, ut AI ad BK, ita MI ad MK. Sed AI eſt ad BK, ut AX ad BZ; & MI eſt ad MK, ut AN ad BN. Quare erit rurſus ex æquali, ut AX ad BZ, ita AN ad BN: & propterea, quemadmodum AX oſtenſa eſt æqualis ipſi AN, ſic etiam BZ ipſi BN æqualis erit.

CAP.

Digitized by Google

CAP. II.

Focorum ellipſis proprietates ſpeciales oſtenduntur.

I. *Focorum ellipſis prima proprietas ſpecialis.*

I. PRæcedenti capite oſtenſæ ſunt *focorum ellipſis proprietates generales*, hoc eſt, eæ quæ obtinent in quolibet ellipſis puncto; nunc eas oſtendemus, quæ *ſpeciales* ſunt, & ad illud dumtaxat punctum pertinent, quod conjungitur cum altero focorum per rectam, axi perpendicularem.

FIG. 43. Sit igitur AB axis major ellipſis, ſintque etiam G, & H foci ipſius. Ex focorum altero G perpendicularis ad axem erigatur GE, ellipſi occurrens in E. Tum ad punctum E ducatur tangentes ET, cum eodem axe conveniens in T.

Ac primo quidem *oſtendemus*, quod erectis ex verticibus axis A, & B ad tangentem uſque perpendicularibus AX, BZ, eæ ſint æquales portionibus AG, BG, abſciſſis ex axe AB per focum G.

Jam enim rectæ AX, BZ parallelæ ſunt ipſi EG. Quare eædem, ex oſtenſis, æquales eſſe debent iis portionibus, in quas dividitur axis per ordinatam, demiſſam ex puncto E. Sed ordinata iſta eſt ipſa EG. Itaque rectæ AX, BZ æquales eſſe debent portionibus AG, BG.

Hoc idem oſtendi quoque poteſt in hunc

Digitized by Google

hunc modum. Quoniam AX, EX ſunt tangentes duæ; per ea, quæ ſuperius oſtenſa ſunt, ſecabitur angulus AGE bifariam per rectam GX. Unde, quum angulus AGE ſit rectus; erit ſemirecto æqualis, tam angulus AGX, quam angulus AXG; & conſequenter duæ AX, AG æquales erunt inter ſe.

Simili ratione, quoniam BZ, EZ ſunt tangentes duæ; ſecabitur angulus BGE bifariam per rectam GZ. Uude, quum angulus BGE ſit rectus; erit ſemirecto æqualis, tam angulus BGZ, quam angulus BZG; atque adeo duæ BZ, BG æquales erunt inter ſe.

II. *Focorum ellipſis ſecunda proprietas ſpecialis.* FIG. 43.

II. Hinc autem *oſtendemus ſecundo loco*, quod ſi ex alio ellipſis puncto M ducatur ad axem AB ordinata MN, quæ conveniat, tam cum tangente, quam cum ellipſi ad partem alteram in punctis R, & O; rectangulum MRO ſit æquale quadrato, quod ſit ex interjecta axis portione GN.

Nam, per ſuperius oſtenſa, rectangulum MRO eſt ad quadratum tangentis ER, ut eſt quadratum ex axe conjugato ad quadratum ex conjugata diametri, quæ tranſit per punctum E. Sed in hac eadem ratione eſt etiam quadratum tangentis AX ad quadratum tangentis EX. Quare erit ex æquali, ut rectangulum MRO ad ER quadratum, ita AX quadratum ad EX quadratum.

Jam, permutando, rectangulum MRO erit ad AX quadratum, ut eſt ER quadratum ad EX quadratum. Sed, propter parallelas NR, EG, AX, ER quadratum eſt ad EX

qua-

Digitized by Google

quadratum, ut GN quadratum ad AG quadratum. Quare erit rurſus ex æquali, ut rectangulum MRO ad AX quadratum, ita GN quadratum ad AG quadratum: & propterea, quemadmodum æqualia ſunt quadrata duo AX, AG, ita quoque erit rectangulum MRO æquale quadrato, quod fit ex GN.

III. *Focorum ellipſis tertia proprietas ſpecialis.* FIG. 43.

III. Atque hinc *ſequitur tertio*, quod ſi jungatur punctum M cum foco G per rectam MG, hæc ſit ſemper æqualis rectæ NR, ubicumque ſumptum fuerit punctum M.

Jam enim rectangulum MRO oſtenſum eſt æquale quadrato, quod fit ex GN. Quare, appoſito communi quadrato ex MN, erit rectangulum MRO una cum MN quadrato æquale duobus quadratis GN, MN.

Quoniam autem MO eſt ſecta bifariam in puncto N; erit rectangulum MRO una cum MN quadrato æquale quadrato ex NR. Et quoniam angulus GNM eſt rectus, erunt quadrata duo GN, MN æqualia quadrato ex ipſa MG. Hinc erit NR quadratum æquale quadrato ex MG: & propterea duæ NR, MG æquales erunt inter ſe.

Hujus autem proprietatis ope, *datis axe, & focis, facile erit invenire longitudinem ordinatæ, quæ cuilibet axis abſciſſæ correſpondet*. Sit enim axis AB, ſintque G, & H foci. Et oporteat invenire ordinatam, quæ correſpondet abſciſſæ AN.

Erigantur ex punctis A, & B perpendiculares AX, BZ æquales ipſis AG, BG. Tum, juncta XZ, erigatur ex puncto N perpendicularis altera NR, ei occurrens in R.

De-

Digitized by Google

Denique centro G, & intervallo ipſius NR deſcribatur arcus, eandem NR ſecans in M; & erit MN ordinata quæſita.

IV. Iiſdem, ut ſupra manentibus, erigatur modo ex puncto T, in quo tangens ET ſecat axem AB, perpendicularis ad ipſum axem TV. Et quemadmodum perpendicularem iſtam TV ellipſis *directricem* deinceps appellabimus, ſic *relate ad eam plures ellipſi proprietates competunt.* IV. *De ellipſis directrice, & de illius relate ad iſtam præcipuis proprietatibus.* FIG. 44.

Nimirum primo, demiſſa ad directricem perpendiculari EF, erit, ut EF ad EG, ita AT ad AG. Nam, ob parallelogrammum FG, duæ EF, GT inter ſe ſunt æquales. Quare erit, ut EF ad EG, ita GT ad EG. Sed, ob triangula æquiangula TGE, TAX, GT eſt ad EG, ut AT ad AX. Et, ob æquales AX, AG, ut eſt AT ad AX, ita eſt AT ad AG. Quare erit ex æquali, ut EF ad EG, ita AT ad AG.

Secundo, demiſſa ex alio quovis ellipſis puncto M ad eandem directricem perpendiculari MS, erit, ut MS ad MG, ita AT ad AG. Nam, ducta ad axem ordinata MN, eaque producta ad tangentem uſque in puncto R; erit, ut TN ad NR, ita AT ad AX, ſive AG. Sed TN eſt ad NR, ut MS ad MG; quum ſint æquales, tam duæ TN, MS, quam duæ NR, MG. Igitur erit ex æquali, ut MS ad MG, ita AT ad AG.

Tertio, id verum erit etiam relate ad alium axis verticem B; quandoquidem erit, ut BT ad BG, ita AT ad AG. Nam, ob triangula æquiangula TBZ, TAX, ut eſt BT ad

BZ,

BZ, ita eſt AT ad AX. Sed, ex ſuperius oſtenſis, æquales ſunt inter ſe, tam duæ AX, AG, quam duæ BZ, BG. Quare erit quoque ut BT ad BG, ita AT ad AG.

Quarto, ſi duo in ellipſi capiantur puncta M, & P, & ex iis perpendiculares ad directricem demittantur MS, PQ; erit, ut MS ad PQ, ita MG ad PG. Nam in eadem ratione, quam habet AT ad AG, eſt, tam MS ad ad MG, quam PQ ad PG. Igitur erit ex æquali, ut MS ad MG, ita PQ ad PG; & permutando erit etiam, ut MS ad PQ, ita MG ad PG.

Denique, ſi ex iiſdem punctis M, & P ducantur ad directricem aliæ duæ rectæ MI, PL, quæ inter ſe ſint parallelæ; erit quoque ut MI ad PL, ita MG ad PG. Nam, ob triangula æquiangula MSI, PQL, ut eſt MI ad PL, ita eſt MS ad PQ. Sed, ex oſtenſis, MS eſt ad PQ, ut eſt MG ad PG. Igitur erit ex æquali, ut MI ad PL, ita MG ad PG.

V.
Circa proprietatem præcipuam ellipſis relate ad directricem monita duo.
FIG. 44.

V. Recta igitur, quæ ex quolibet ellipſis puncto perpendiculariter demittitur ad directricem, eſt ad rectam, quæ ex eodem puncto ducitur ad focum G, in eadem illa ratione, quam habet AT ad AG. Sed *circa proprietatem iſtam duo occurrunt, notatu digna.*

Primum eſt, quod ratio, quam habet AT ad AG, ſit majoris ad minus: adeo nempe, ut perpendicularis demiſſa ad directricem ſit ſemper major recta, quæ ducitur ad focum G. Ob tangentem enim ET, ut eſt CT ad CA, ita eſt CA ad CG. Quare convertendo erit quoque, ut CT ad AT, ita CA ad AG. Sed

CT

CT major eſt, quam CA. Et igitur AT etiam major erit, quam AG.

Alterum eſt, quod eadem illa ratio ſit æqualis ei, quam habet axis AB ad diſtantiam, quæ inter utrumque focum exiſtit. Nam, ob tangentem ET, ut eſt CT ad CA, ita eſt CA ad CG. Quare, dividendo, erit, ut AT ad CA, ita AG ad CG; & permutando erit quoque, ut AT ad AG, ita CA ad CG. Jam vero CA eſt ad CG, ut AB ad GH. Et igitur ex æquali AT erit ad AG, ut eſt AB ad GH.

VI. Ad directricem ellipſis alia etiam proprietas pertinet valde ſingularis. Sed ad eam oſtendendam, *ſternendum eſt prius, velut lemma, ſequens theorema,* quod ſi ad aliquod ellipſis punctum M ducatur tangens MS, conveniens cum axe AB in puncto S, & ex puncto contactus M demittatur ad eundem axem ordinata MO; quod, inquam, CG ſit ad CO, ut eſt CS ad CT.

VI. *Lemma pro oſtendenda ſingulari ellipſis relata ad directricem proprietate.*

FIG. 45.

Quum enim recta ET contingat ellipſim, & ex puncto contactus E ducta ſit ad axem ordinata EG; erit, ex ſuperius oſtenſis, ut CT ad CA, ita CA ad CG: proindeque rectangulum ex CT in CG æquale erit quadrato, quod ſit ex CA.

Similiter, quoniam recta MS eſt tangens ellipſis, & ex puncto contactus M ducta eſt ad axem ordinata MO; per ea, quæ ſuperius oſtenſa ſunt, erit, ut CS ad CA, ita CA ad CO. Quare rectangulum ex CS in CO æquale erit quadrato, quod ſit ex CA.

Eidem igitur CA quadrato æquale eſt,

tam rectangulum ex CT in CG, quam rectangulum ex CS in CO. Quare erit rectangulum ex CT in CG æquale rectangulo ex CS in CO: & propterea erit, ut CG ad CO, ita CS ad CT.

VII. *Lemmatis præcedentis corollarium primum.* FIG. 45.

VII. Hinc autem *ſequitur primo*, quod ſi eadem tangens MS conveniat cum directrice TV in puncto K, & cum axe conjugato PQ in puncto R; rectangulum ex MO in TK ſit ad CP quadratum, ut eſt GO ad CG.

Quum enim CG ſit ad CO, ut eſt CS ad CT; erit convertendo, ut CG ad GO, ita CS ad TS. Sed, ob triangula æquiangula CRS, TKS, CS eſt ad TS, ut CR ad TK. Quare erit ex æquali, ut CR ad TK, ita CG ad GO; & invertendo erit etiam, ut TK ad CR, ita GO ad CG.

Præterea, demiſſa ad axem conjugatum PQ ordinata ML; erit, ob tangentem MR, ut CR ad CP, ita CP ad CL. Unde rectangulum ex CR in CL, ſive MO æquale erit quadrato, quod fit ex CP: & propterea rectangulum ex MO in TK erit ad CP quadratum, ut eſt idem rectangulum ex MO in TK ad rectangulum ex CR in MO.

Jam, ob communem altitudinem MO, rectangulum ex MO in TK eſt ad rectangulum ex CR in MO, ut eſt TK ad CR. Oſtenſum eſt autem, TK eſſe ad CR, ut eſt GO ad CG. Quare erit ex æquali, ut rectangulum ex MO in TK ad rectangulum ex CR in MO, ita GO ad CG; & conſequenter in hac eadem ratione erit etiam rectangulum ex MO in TK ad CP quadratum.

VIII. Un-

Digitized by Google

VIII. Unde *ſequitur ſecundo*, rectangulum ex MO in TK æquale eſſe rectangulo TGO; atque adeo eſſe, ut TG ad TK, ita MO ad GO. VIII. *Corollarium ſecundum.* FIG. 45.

Quum enim recta ET contingat ellipſim, & ex puncto contactus E demiſſa ſit ad axem ordinata EG; erit, ex ſuperius oſtenſis, rectangulum TGC æquale rectangulo AGB. Sed rectangulum AGB adæquat quartam partem figuræ axis AB, ſive etiam quadratum, quod fit ex CP, dimidio axis conjugati. Quare rectangulum TGC eidem CP quadrato pariter æquale erit.

Hinc erit, ut rectangulum TGO ad rectangulum TGC, ita idem rectangulum TGO ad CP quadratum. Sed, ob communem altitudinem TG, rectangulum TGO eſt ad rectangulum TGC, ut eſt GO ad GC. Quare erit ex æquali, ut GO ad GC, ita rectangulum TGO ad CP quadratum.

Et quoniam oſtenſum eſt, GO eſſe ad GC, ut eſt rectangulum ex MO in TK ad CP quadratum; erit rurſus ex æquali, ut rectangulum ex MO in TK ad CP quadratum, ita rectangulum TGO ad idem CP quadratum. Unde rectangulum ex MO in TK æquale erit rectangulo TGO.

IX. Atque hinc *ſequitur demum*, quod junctis rectis GK, GM, rectus ſit angulus KGM, quod ſub iis continetur. IX. *Corollarium tertium.* FIG. 45.

Quum enim oſtenſum ſit rectangulum ex MO in TK æquale rectangulo TGO; erit, ut TG ad TK, ita MO ad GO. Unde triangula duo rectangula GTK, MOG habebunt

 cir-

circa angulos rectos latera proportionalia ; & conſequenter æquiangula erunt.

Angulus igitur TGK æqualis erit angulo GMO. Unde, appoſito communi OGM, erunt duo anguli TGK , OGM æquales duobus angulis GMO , OGM . Sed iſti duo ſimul ſumpti unum rectum adæquant . Quare etiam uni recto æquales erunt priores duo ; atque adeo angulus KGM pariter rectus erit .

X. *Ellipſis relate ad directricem ſingularis proprietas demonſtratur.* FIG. 45.

X. His præmiſſis , *facile modo erit oſtendere proprietatem illam ſingularem , quæ pertinet ad directricem ellipſis* . Illiuſmodi proprietas hæc eſt , quod ſi per focorum alterum G ducatur recta MN , utrinque ad ellipſim terminata, & rectæ MS , NX contingant ellipſim in punctis M , & N ; tangentes iſtæ ſuper directrice TV ſibi mutuo occurrant .

Si enim fieri poteſt , ſecent tangentes illæ directricem TV in punctis diverſis : nimirum tangens quidem MS in puncto K , tangens vero NX in puncto I . Tum jungantur rectæ GK, GI .

Et quoniam recta MK eſt tangens ellipſis , eaque occurrit directrici in puncto K ; erit angulus KGM rectus ; adeoque rectus pariter angulus KGN , qui ad partem alteram exiſtit.

Eadem ratione , quia recta NX eſt tangens ellipſis , eademque ſecat directricem in puncto I , erit angulus IGN ſimiliter rectus. Unde duo anguli KGN , IGN æquales erunt inter ſe. Quod fieri non poteſt.

XI. *Alia ellipſis relate ad di-*

XI. Hinc vero *alia etiam proprietas valde elegans fluit* ; nimirum , quod ſi per focorum

rum alterum G ducatur recta MN, utrinque ad ellipſim terminata; & actis tangentibus MK, NK, ſibi mutuo occurreutibus in K, jungatur recta GK; hæc perpendicularis eſſe debeat ad ipſam MN.

reſtricem elegans proprietas oſtenditur.

FIG. 45.

Referat namque recta TV directricem ellipſis. Et, per oſtenſam proprietatem, in ea locabitur punctum K, in quo tangentes duæ ſibi mutuo occurrunt. Unde per ea, quæ paulo ante oſtenſa ſunt, omnino neceſſe eſt, ut rectus ſit uterque angulorum KGM, KGN; atque adeo, ut ipſa GK perpendicularis ſit ad rectam MN.

Hoc idem erui quoque poteſt ex proprietate illa generali, ſuperius oſtenſa, quod recta GK bifariam dividat angulum, contentum ſub rectis GM, GN. Inde enim ſequitur, eandem rectam GK æquales ſemper angulos conſtituere cum rectis GM, GN; atque adeo rectos eſſe angulos illos, ubi ipſæ GM, GN jacent in directum.

XII. Cæterum ex iis, quæ modo oſtenſa ſunt, *datis focis, & directrice, nullo negotio ducetur tangens ad quodlibet ellipſis punctum*. Referat enim recta TV directricem ellipſis, ſintque foci ejuſdem puncta G, & H. Oportet ad punctum N tangentem ducere.

XII. *Quomodo datis directrice, & focis ellipſis duci poſſit tangens ad punctum datum.*

FIG. 45.

Ad focorum alterum G ducatur ex puncto N recta NG. Tum ei ex eodem foco G perpendicularis erigatur GK, conveniens cum directrice in puncto K. Jungantur denique puncta N, & K per rectam NK. Et erit recta iſta NK tangens quæſita.

Si enim fieri poteſt, contingat elli-

pſim in puncto N recta quævis alia NI, quæ conveniat cum directrice in puncto I. Tum ex foco G ad punctum I ducatur recta GI. Et, ex oſtenſis, rectus erit angulus IGN. Sed ex conſtructione rectus etiam eſt angulus KGN. Quare duo anguli IGN, KGN æquales inter ſe erunt. Quod fieri non poteſt.

C A P. III.

Demonſtrantur focorum hyperbolæ proprietates generales.

1. *Definitio focorum hyperbolæ, & quod æqualiter diſtent, tum a centro, cum a verticibus.* Fig. 46.

I. SImiliter in hyperbola foci, ſive umbilici dicuntur *duo illa axis puncta quibus ordinatæ correſpondentes ſemiſſem parametri ejuſdem axis adæquant*.

Ita, ſi AB ſit axis hyperbolæ, & AD parameter ejus, capianturque in axe illo AB duo puncta G, & H adeo quidem, ut ordinatæ EG, FH, punctis illis correſpondentes, adæquent ſemiſſem ipſius AD; dicentur puncta G, & H foci, ſive umbilici ipſius hyperbolæ.

Unde liquet, focos G, & H æqualiter diſtare, tam a centro hyperbolæ C, quam ab axis verticibus A, & B. Nam, quemadmodum æqualia ſunt quadrata EG, FH; ita quoque æqualia erunt rectangula AGB, AHB, quæ iis quadratis proportione correſpondent.

Hinc, addendo æqualia iſta rectangula AGB, AHB æqualibus quadratis CA, CB, fiet qua-

quadratum ex CG æquale etiam quadrato ex CH : & propterea æquales erunt inter ſe, tam duæ CG, CH, quam duæ AG, BH.

II. Ex ipſa autem focorum definitione liquet, *rectangulum ſub axis portionibus, per focorum alterum abſciſſis, quadrantem figuræ ejuſdem axis adæquare.* Maneant enim omnia, ut ſupra. Dico, tam rectangulum AGB, quam rectangulum AHB æquale eſſe quartæ parti figuræ axis AB, quæ conſtituitur per rectangulum DAB. II. *Focorum hyperbolæ proprietas prima generalis.* FIG. 46.

Nam, propter hyperbolam, EG quadratum eſt ad rectangulum AGB, ut AD ad AB; ſive etiam, ut AD quadratum ad rectangulum DAB. Sed EG quadratum eſt quarta pars quadrati, quod fit ex AD; quum ex conſtructione EG ſemiſſem adæquet ipſius AD. Quare etiam rectangulum AGB quarta pars erit rectanguli DAB.

Eadem ratione, propter hyperbolam, FH quadratum eſt ad rectangulum AHB, ut AD ad AB; ſive etiam, ut AD quadratum ad rectangulum DAB, Sed FH quadratum eſt quarta pars quadrati, quod fit ex AD; quum ex conſtructione FH ſemiſſem adæquet ipſius AD. Quare etiam rectangulum AHB quarta pars erit rectanguli DAB.

III. Ducantur nunc ad vertices A, & B tangentes AX, BZ, quæ conveniant cum tangente quavis tertia MXZ in punctis X, & Z. Et *facile erit oſtendere*, quod ſi ex focorum altero G ducantur rectæ GX, GZ, angulus XGZ, ſub ipſis comprehenſus, perpetuo rectus eſſe debeat, ubicunque fuerit punctum contactus M. III. *Focorum hyperbolæ proprietas ſecunda generalis.* FIG. 47.

Nam rectangulum ex AX in BZ, velut æquale quadrato, quod ſit ex dimidio axis conjugati, adæquat quartam partem figuræ axis AB. Sed ejuſdem figuræ quadranti æquale eſt quoque rectangulum AGB. Quare erit rectangulum ex AX in BZ æquale rectangulo AGB: & propterea erit, ut AX ad AG, ita BG ad BZ.

Hinc duo triangula rectangula XAG, GBZ æquiangula erunt; adeoque erit angulus AXG æqualis angulo BGZ. Et, appoſito communi AGX, erunt etiam duo anguli AXG, AGX æquales duobus angulis BGZ, AGX. Sed priores duo unum rectum adæquant. Quare uni recto pariter æquales erunt poſteriores duo; & conſequenter angulus XGZ, ex iis compoſitus, rectus erit.

IV. *Focorum hyperbolæ proprietas tertia generalis.*

IV. Eadem autem ratione oſtendemus, rectum eſſe angulum XHZ, quem continent rectæ HX, HZ, ductæ ex foco altero H ad eadem puncta X, & Z. Unde *ſequitur quoque*, quod ſi ex puncto K, in quo rectæ duæ GZ, HX ſe mutuo ſecant, ducatur ad punctum contactus M recta KM, hæc perpendicularis ſit ad tangentem MZ.

FIG. 47.

Si enim fieri poteſt, ſit KO perpendicularis ad XZ. Et quoniam rectus eſt, tam angulus XGZ, quam angulus XHZ; circulus, deſcriptus ſuper XZ, velut diametro, tranſibit per focos G, & H. Unde erit angulus HGZ æqualis angulo HXZ, ſive KXO. Sed angulus HGZ æqualis eſt angulo AXG. Quare duo anguli AXG, KXO æquales erunt inter ſe; & propterea, ob triangula æquiangula AGX, OKX,

OKX, erit, ut AX ad OX, ita GX ad KX.

Simili ratione oſtendemus, BZ eſſe ad OZ, ut eſt HZ ad KZ. Unde, quia propter triangula æquiangula KGX, KHZ, GX eſt ad KX, ut HZ ad KZ; erit ex æquali, ut AX ad OX, ita BZ ad OZ; & permutando erit quoque, ut AX ad BZ, ita OX ad OZ.

Præterea, demiſſa ad axem ordinata MN, erit, ob tangentem MT, ut CN ad CA, ita CA ad CT. Unde, convertendo primum, erit, ut CN ad AN, ita CA ad AT; & addendo deinde antecedentes conſequentibus, erit quoque, ut CN ad BN, ita CA ad BT: proindeque, per ordinatam rationem, erit, ut AN ad BN, ita AT ad BT. Sed AN eſt ad BN, ut MX ad MZ. Et AT eſt ad BT, ut AX ad BZ. Quare ex æquali erit, ut AX ad BZ, ita MX ad MZ.

Quum igitur in eadem ratione rectarum AX, BZ ſit, tam OX ad OZ, quam MX ad MZ; erit rurſus ex æquali, ut OX ad OZ, ita MX ad MZ. Unde, ſubducendo antecedentes ex conſequentibus, erit, ut XZ ad OZ, ita XZ ad MZ: & propterea duæ OZ, MZ æquales erunt inter ſe. Quod fieri non poteſt.

V. Atque hinc *ſequitur etiam*, rectas MG, MH, quæ ex puncto contactus M ad focos inclinantur, æquales cum tangente MZ angulos conſtituere, hoc eſt angulum GMX æqualem eſſe angulo HMZ.

V. *Focorum hyperbolæ proprietas quarta generalis.*

FIG. 47.

Quum enim rectus ſit, tam angulus KGX, quam angulus KMX; circulus, deſcri-

ſcriptus ſuper KX, velut diametro, tranſibit per puncta G, & M: proindeque erit angulus GMX æqualis angulo GKX.

Eadem ratione, quia rectus eſt uterque angulorum KHZ, KMZ; ſemicirculus, deſcriptus ſuper KZ, velut diametro, tranſibit per puncta H, & M. Quare erit angulus HMZ æqualis angulo HKZ, ſive GKX.

Eidem igitur angulo GKX æqualis eſt, tam angulus GMX, quam angulus HMZ. Quare erit angulus GMX æqualis angulo HMZ: & propterea rectæ duæ MG, MH cum tangente MZ æquales angulos conſtituent.

VI. *Focorum hyperbolæ proprietas quinta generalis.*

VI. Inde vero *deducitur præterea*, eaſdem rectas MG, MH continere rectangulum, quod quartam partem adæquat figuræ diametri, tranſeuntis per punctum contactus M.

FIG. 47.

Nam, ex ſuperius oſtenſis, ſi ex centro hyperbolæ C ad puncta X, & Z intelligantur ductæ rectæ CX, CZ, eæ exhibebunt nobis duas hyperbolæ diametros conjugatas. Quare rectangulum XMZ æquale erit quadrato, quod fit ex dimidio conjugatæ illius diametri, quæ pertinet ad punctum M.

Jam quadratum iſtud adæquat quartam partem figuræ ejuſdem diametri. Unde conſtabit, rectangulum GMH æquale eſſe quadranti figuræ diametri, tranſeuntis per punctum M, ſi utique oſtendi poſſit, rectangulum GMH æquale eſſe rectangulo XMZ. Id vero oſtendemus in hunc modum.

Quoniam rectus eſt uterque angulorum KGX, KMX; erunt alii duo anguli GKM, GXM duobus rectis æquales. Et ſimili-

militer quia rectus eſt, tam angulus KHZ, quam angulus KMZ; erunt alii duo anguli GKM, MHZ duobus rectis pariter æquales.

Hinc duo anguli GKM, GXM æquales erunt duobus angulis GKM, MHZ: proindeque, ablato communi GKM, remanebit angulus GXM æqualis angulo MHZ. Unde triangula duo GMX, HMZ æquiangula erunt: & propterea, quum ſit, ut MX ad MG, ita MH ad MZ; erit rectangulum GMH æquale rectangulo XMZ.

VII. Focorum hyperbolæ proprietas ſexta generalis. FIG. 48.

VII. Exinde *colligitur pariter*, differentiam rectarum MG, MH æqualem eſſe axi AB. Ducantur enim uni earum, veluti MG, parallelæ CR, HS. Tum jungantur rectæ AR, HR, BR.

Et quoniam eidem angulo GMX æqualis eſt, tam angulus HMS, quam angulus HSM, erunt duo anguli HMS, HSM æquales inter ſe: & propterea triangulum MHS iſoſceles erit. Sed baſis ejus MS biſecta eſt per rectam HR; quum ſit, ut RM ad RS, ita CG ad CH. Quare erit HR perpendicularis ad ipſam MS.

Hinc, ob circulum, tranſeuntem per quatuor puncta A, R, H, X, erit angulus ARX æqualis angulo AHX. Et ſimiliter, ob circulum, tranſeuntem per puncta quatuor B, H, Z, R, erit angulus BRX æqualis angulo BHZ. Unde angulus ARB æqualis erit angulo XHZ; atque adeo rectus erit.

Id quum ita ſit, ſemicirculus, deſcriptus ſuper AB, velut diametro, tranſibit per punctum R: & propterea recta CR ipſi CA, vel

CB

Digitized by Google

CB æqualis erit. Sed, ob rectam GH biſectam in C, eſt MG dupla ipſius CI, & MH dupla ipſius MI, ſive IR. Itaque differentia duarum MG, MH dupla erit ipſius CR; atque adeo æqualis axi AB.

VIII. *Alia hyperbolam in plano deſcribendi ratio, datis axe, & umbilicis.* FIG. 47.

VIII. Hinc *vero alia nobis ſuboritur ratio deſcribendi hyperbolam in plano, datis focis cum longitudine axis*. Sit enim AB axis hyperbolæ, ſintque puncta G, & H ejuſdem foci, ſeu umbilici. Oportet, in ſubjecto plano hyperbolam deſcribere.

Ad alterum focorum H aptetur regula HL, quæ longior ſit axe AB. Tum, ſumpto filo, cujus longitudo minor ſit longitudine regulæ per axem AB, alligentur extrema ejus punctis G, & L. Circumducatur deinde regula HL circa focum H, & ope ſtili feratur etiam filum cum ipſa regula, ea lege, ut portiones ejus maneant continuo tenſæ. Dico, curvam, quæ per ſtilum in ſubjecto plano deſcribitur, eſſe hyperbolam quæſitam.

Jam enim ex ipſa curvæ deſcriptione liquet, ejus naturam hanc eſſe, ut differentia rectarum, quæ ex aliquo ejus puncto ducuntur ad puncta G, & H, adæquet differentiam, quæ inter regulam, & filum exiſtit. Sed ex conſtructione differentia iſta æqualis eſt axi AB. Quare eidem axi AB æqualis quoque erit eadem illa rectarum differentia: & propterea curva deſcripta erit hyperbola.

Perſpicuum eſt autem, præfata ratione deſcribi tantum hyperbolam, quæ tranſit per punctum A. Sed, ſi deſcribenda quoque eſſet hyperbola alia, quæ tranſit per punctum

B;

Digitized by Google

B; tunc regula quidem aptanda erit ad focum G, filum vero oportebit, ut extremitate ſua foco H alligetur. Patetque etiam, utriuſque hyperbolæ eo majorem portionem deſcribi, quo longior aſſumitur regula.

IX. Sit nunc recta MT aliqua tangens hyperbolæ, conveniens cum axe AB in puncto T. Erigatur ſuper ea perpendicularis MO, eidem axi occurrens in O. Et *circa perpendicularem iſtam plura licebit oſtendere.* IX. *Proprietates, pertinentes ad perpendicularem, quæ ex puncto contactus ducitur ad tangentem.*

Nimirum primo, quod rectæ MG, MH conſtituant cum ea, producta verſus R, angulos æquales. Nam rectæ MG, MH efficiunt æquales angulos cum tangente MT. Sed æquales quoque ſunt anguli, quos cum eadem tangente conſtituit perpendicularis OR. Quare erit angulus GMO æqualis angulo HMR. FIG. 49.

Secundo, quod recta HO ſit harmonice ſecta in punctis T, & G. Nam rectæ MG, MH, ob æquales angulos, quos conſtituunt cum perpendiculari OR, ſunt, ut perpendicula, quæ ex punctis G, & H demittuntur ad ipſam OR, ſive etiam, ut rectæ GO, HO. Sed, ob angulum GMH biſectum per tangentem MT, eædem MG, MH ſunt, ut portiones TG, TH. Igitur erit ex æquali, ut TG ad TH, ita GO ad HO: & propterea rectangulum, quod fit ex tota HO in portionem intermediam TG, æquale erit rectangulo ſub portionibus extremis TH, GO.

Tertio, quod tres rectæ CO, CG, CT ſint continue proportionales. Quum enim rectangulum ex TH in GO ſit æquale rectangulo ex TG in HO; erit, ut TH ad TG, ita

HO

HO ad GO ; & componendo, ut GH ad TG, ita ſumma duarum HO, GO ad ipſam GO; & capiendo antecedentium dimidia , ut CG ad TG, ita CO ad GO; ac denique convertendo, ut CG ad CT, ita CO ad CG.

Quarto, quod ſi demittatur ad axem ordinata MN , data ſit ratio, quam habet CO ad CN, hoc eſt æqualis duplicatæ ejus, quam habet CG ad CA . Quum enim tres rectæ CT , CG, CO ſint continue proportionales ; erit CG quadratum æquale rectangulo TCO. Sed , ex ſuperius oſtenſis, CA quadratum eſt æquale rectangulo TCN . Quare erit , ut rectangulum TCO ad rectangulum TCN , ſive etiam ut CO ad CN , ita CG quadratum ad CA quadratum.

Denique , quod data ſit etiam ratio, quam habet CO ad NO , hoc eſt æqualis ei, quam habet CG quadratum ad rectangulum AGB. Jam enim CO eſt ad CN, ut eſt CG quadratum ad CA quadratum . Sed , ex ſuperius oſtenſis , CN eſt ad NO , ut axis AB ad parametrum ejus AD ; ſive etiam, ut AB quadratum ad rectangulum DAB ; ſive demum , ut CA quadratum ad rectangulum AGB . Quare ex æquo ordinando erit , ut CO ad NO , ita CG quadratum ad rectangulum AGB .

X. *Ejuſdem perpendicularis ſingularis quædam proprietas oſtenditur.* FIG. 49.

X. Meretur autem , ut *ſpeciatim oſtendatur ſequens proprietas* : nimirum , quod ſi ex puncto O ſuper aliquam ipſarum MG , MH perpendicularis demittatur OR , abſciſſa portio MR ſit æqualis dimidio parametri AD, quæ defertur ad axem AB.

Nec ſane difficile erit eam, oſtendere . Nam

Nam rectæ MG, MH, ob æquales angulos, quos conſtituunt cum tangente MT, ſunt, ut portiones TG, TH. Quare differentia rectarum MG, MH, ſive axis AB, erit ad MH, ut differentia duarum TG, TH ad ipſam TH; & capiendo antecedentium dimidia, erit quoque, ut CA ad MH, ita CT ad TH; ac denique permutando erit, ut CA ad CT, ita MH ad TH.

Demittatur jam ex puncto H ſuper tangentem perpendicularis HL. Et MH ad TH erit in ratione compoſita ex MH ad HL, & ex HL ad TH. Jam vero MH eſt ad HL, ut MO ad MR. Itemque HL eſt ad TH, ut MO ad TO; ſive etiam, ut NO ad MO. Quare erit MH ad TH in ratione compoſita ex NO ad MO, & ex MO ad MR; atque adeo in ſimplici ratione, quam habet NO ad MR.

Quum igitur CA ſit ad CT, ut MH ad TH, & MH ſit ad TH, ut NO ad MR; erit ex æquali, ut CA ad CT, ita NO ad MR. Sed CA eſt ad CT, ut CN ad CA. Quare rurſus ex æquali erit, ut CN ad CA, ita NO ad MR; & permutando erit pariter, ut CN ad NO, ita CA ad MR. Eſt autem ex oſtenſis, ut CN ad NO, ita AB ad AD. Et igitur ex æquali rurſus erit, ut AB ad AD, ita CA ad MR: proindeque, ſicuti CA ſemiſſis eſt ipſius AB, ita erit MR ſemiſſis ipſius AD.

XI. Præterea *pertinet ad focos hyperbolæ hæc alia proprietas*, quod ſi duæ tangentes MK, NK conveniant in K, & ex eodem foco G ducantur ad puncta contactus rectæ GM, GN, angulus MGN bifariam ſit ſectus per rectam GK. Jun-

XI. *Focorum hyperbolæ alia proprietas generalis.* FIG. 50.

Jungantur enim puncta M, & N per rectam MN, cui per focum G, & centrum C parallelæ agantur OR, XZ, cum tangentibus convenientes. Jungantur quoque rectæ HM, HN; & conveniat cum axe, tangens quidem MK in puncto T, tangens vero NK in puncto S.

Et quoniam HM eſt ad GM, ut TH ad TG; erit dividendo, ut AB ad GM, ita differentia duarum TH, TG ad ipſam TG; & capiendo antecedentium dimidia, erit quoque, ut CA ad GM, ita CT ad TG. Sed CT eſt ad TG, ut CX ad GO. Quare erit ex æquali, ut CA ad GM, ita CX ad GO.

Eadem ratione oſtendemus, CA eſſe ad GN, ut eſt CZ ad GR. Unde, quia GM eſt ad GN in ratione compoſita ex GM ad CA, & ex CA ad GN; habebit quoque GM ad GN rationem compoſitam ex GO ad CX, & ex CZ ad GR.

Jam diameter, quæ biſecat rectam MN, eamque velut ſuam ordinatam agnoſcit, tranſire debet per punctum K, in quo tangentes duæ MK, NK ſibi mutuo occurrunt. Quare eadem diameter biſecabit quoque rectam XZ: & propterea, quum æquales ſint duæ CX, CZ; erit GM ad GN in ſimplici ratione, quam habet GO ad GR.

Ponamus modo, rectam GK ipſi MN occurrere in L. Et quoniam GO eſt ad GR, ut ML ad NL; erit ex æquali, ut GM ad GN, ita ML ad NL: proindeque angulus MGN ſectus erit bifariam per rectam GK.

XII. Theorema

XII. Sed *hanc aliam proprietatem nec*

etiam

etiam ſilentio præteribimus, quod ſi per focum aliquem G ducatur recta MN, utrinque ad hyperbolam terminata, ea ſit tertia proportionalis poſt axem AB, & diametrum KL, ipſi MN parallelam.

de longitudine rectæ, per focorum alterum tranſeuntis.
FIG. 51.

Ducantur enim ad puncta M, & N tangentes MT, NS, convenientes cum axe AB in punctis T, & S, cumque diametro KL in punctis X, & Z. Tum ex iiſdem punctis M, & N demittantur ad diametrum KL ordinatæ MO, NR.

Et quoniam, ut paulo ante vidimus, CA eſt ad GM, ut CT ad TG; erit quoque, ut CA ad GM, ita CX ad eandem GM. Quare duæ CA, CX æquales erunt inter ſe. Quumque eadem ratione etiam CZ ipſi CA æqualis comperiatur; erit tota XZ æqualis axi AB.

Quia autem tangens MX occurrit diametro KL in puncto X, & ex puncto contactus M ducta eſt ad eandem diametrum ordinata MO; erit, ut CX ad CK, ita CK ad CO; & duplicando terminos omnes, erit quoque, ut XZ ad KL, ita KL ad OR.

Jam, quemadmodum XZ eſt æqualis axi AB, ita OR æqualis eſt rectæ MN. Quare erit, ut AB ad KL, ita KL ad MN: & propterea recta MN, ducta per focum G, & utrinque ad hyperbolam terminata, erit tertia proportionalis poſt axem AB, & diametrum KL, ipſi MN parallelam.

XIII. Hinc autem *prono alveo fluit*, quod ſi per eundem focum, vel etiam per utrumque ducantur rectæ duæ MN, PQ, utrinque ad hyperbolam terminatæ; eæ ſint inter ſe, ut

XIII.
Corollarium, quod ex præcedenti theoremate deducitur.
FIG. 51.

quadrata diametrorum, quæ ipſis ſunt parallelæ,

Quum enim MN ſit tertia proportionalis poſt axem AB, & diametrum KL, ipſi MN parallelam; erit KL quadratum æquale rectangulo ex AB in MN. Et eadem ratione, quia PQ eſt tertia proportionalis poſt axem AB, & diametrum EF, ipſi PQ æquidiſtantem; erit EF quadratum æquale rectangulo ex AB in PQ.

Inde autem erit, ut KL quadratum ad EF quadratum, ita rectangulum ex AB in MN ad rectangulum ex AB in PQ. Sed, ob communem altitudinem AB, rectangulum ex AB in MN eſt ad rectangulum ex AB in PQ, ut MN ad PQ. Quare erit ex æquali, ut MN ad PQ, ita KL quadratum ad EF quadratum.

Quum igitur, ex ſuperius oſtenſis, rectangula, quæ fiunt ex ſegmentis duarum ſecantium, ſint inter ſe, ut quadrata ex conjugatis earum diametrorum, ad quas ſecantes illæ velut ordinatæ referuntur; erunt nunc illa eadem rectangula, ut earundem diametrorum ordinatæ illæ, quæ tranſeunt per focos.

XIV. *Focorum hyperbolæ ultima proprietas generalis.* FIG. 52.

XIV. Denique *hanc quoque proprietatem nolumus ſilentio committere*, quod ſi recta XZ hyperbolam contingat in M, & ducta ex focorum altero G ad punctum contactus M recta GM, huic per vertices axis parallelæ agantur AX, BZ, cum tangente convenientes; quod, inquam, demiſſa ad axem ordinata MN, ſint ipſæ AX, BZ æquales portionibus axis AN, BN.

Ex-

Extendatur enim tangens MX, uſque donec conveniat cum axe AB in puncto T. Et, ut paulo ſuperius oſtenſum eſt, CA erit ad GM, ut eſt CT ad TG. Sed, ducta CL ipſi GM parallela, CT eſt ad TG, ut CL ad GM. Igitur erit e x æquali, ut CA ad GM, ita CL ad eandem GM: & propterea CL ipſi CA æqualis erit.

Jam, ob tangentem MT, CT eſt ad CA, ut CA ad CN. Quare, ſubducendo antecedentes ex conſequentibus erit, ut CT ad AT, ita CA, ſive CL ad AN; & permutando, ut CT ad CL, ita AT ad AN. Sed CT eſt ad CL, ut AT ad AX. Et igitur ex æquali erit, ut AT ad AX, ita AT ad AN: proindeque AX ipſi AN æqualis erit.

Ulterius, quum CN ſit ad CA, ut CA ad CT; erit, convertendo primum, ut CN ad AN, ita CA ad AT; & addendo antecedentes conſequentibus, erit quoque, ut CN ad BN, ita CA ad BT. Unde per ordinatam rationem erit, ut AN ad BN, ita AT ad BT. Sed AT eſt ad BT, ut AX ad BZ. Quare erit ex æquali, ut AX ad BZ, ita AN ad BN: & propterea, quemadmodum AX oſtenſa eſt æqualis ipſi AN, ſic etiam BZ ipſi BN æqualis erit.

C A P. IV.

Demonſtrantur proprietates ſpeciales focorum hyperbolæ.

I. *Focorum hyperbolæ prima proprietas ſpecialis.* FIG. 53.

I. PRæcedenti capite oſtenſæ ſunt *focorum hyperbolæ proprietates generales*, hoc eſt, eæ quæ obtinent in quolibet hyperbolæ puncto; nunc eas oſtendemus, quæ *ſpeciales* ſunt, & ad illud dumtaxat punctum pertinent, quod conjungitur cum altero focorum per rectam, axi perpendicularem.

Sit igitur AB axis hyperbolæ, ſintque etiam G, & H foci ipſius. Ex focorum altero G perpendicularis ad axem erigatur GE, hyperbolæ occurrens in E. Tum ad punctum E ducatur tangens ET, cum eodem axe conveniens in T.

Ac primo quidem *oſtendemus*, quod erectis ex verticibus axis A, & B ad tangentem uſque perpendicularibus AX, BZ, eæ ſint æquales portionibus AG, BG, abſciſſis ex axe AB per focum G.

Jam enim rectæ AX, BZ parallelæ ſunt ipſi EG. Quare eædem, ex oſtenſis, æquales eſſe debent iis portionibus, in quas dividitur axis per ordinatam, demiſſam ex puncto E. Sed ordinata iſta eſt ipſa EG. Itaque rectæ AX, BZ æquales eſſe debent portionibus AG, BG.

Hoc idem oſtendi quoque poteſt in hunc

hunc modum. Quoniam AX, EX ſunt tangentes duæ; per ea, quæ ſuperius oſtenſa ſunt, ſecabitur angulus AGE bifariam per rectam GX. Unde, quum angulus AGE ſit rectus; erit ſemirecto æqualis, tam angulus AGX, quam angulus AXG; & conſequenter duæ AX, AG æquales erunt inter ſe.

Simili ratione, quoniam BZ, EZ ſunt tangentes duæ; ſecabitur angulus BGE bifariam per rectam GZ. Unde, quum angulus BGE ſit rectus; erit ſemirecto æqualis, tam angulus BGZ, quam angulus BZG; atque adeo duæ BZ, BG æquales erunt inter ſe.

II. *Focorum hyperbolæ ſecunda proprietas ſpecialis.* FIG. 53.

II. Hinc autem *oſtendemus ſecundo loco*, quod ſi ex alio hyperbolæ puncto M ducatur ad axem AB ordinata MN, quæ conveniat, tam cum tangente, quam cum hyperbola ad partem alteram in punctis R, & O; rectangulum MRO ſit æquale quadrato, quod ſit ex interjecta axis portione GN.

Nam, per ſuperius oſtenſa, rectangulum MRO eſt ad quadratum tangentis ER, ut eſt quadratum ex axe conjugato ad quadratum ex conjugata diametri, quæ tranſit per punctum E. Sed in hac eadem ratione eſt etiam quadratum tangentis AX ad quadratum tangentis EX. Quare erit ex æquali, ut rectangulum MRO ad ER quadratum, ita AX quadratum ad EX quadratum.

Jam, permutando, rectangulum MRO erit ad AX quadratum, ut eſt ER quadratum ad EX quadratum. Sed, propter parallelas NR, EG, AX, ER quadratum eſt ad EX

quadratum, ut GN quadratum ad AG quadratum. Quare erit rurſus ex æquali, ut rectangulum MRO ad AX quadratum, ita GN quadratum ad AG quadratum: & propterea, quemadmodum æqualia ſunt quadrata duo AX, AG, ita quoque erit rectangulum MRO æquale quadrato, quod fit ex GN.

III. *Focorum hyperbolæ tertia proprietas ſpecialis.* FIG. 53.

III. Atque hinc *ſequitur tertio*, quod ſi jungatur punctum M cum foco G per rectam MG, hæc ſit ſemper æqualis rectæ NR; ubicumque ſumptum fuerit punctum M.

Jam enim rectangulum MRO oſtenſum eſt æquale quadrato, quod fit ex GN. Quare, appoſito communi quadrato ex MN; erit rectangulum MRO una cum MN quadrato æquale duobus quadratis GN, MN.

Quoniam autem MO eſt ſecta bifariam in puncto N; erit rectangulum MRO una cum MN quadrato æquale quadrato ex NR. Et quoniam angulus GNM eſt rectus, erunt quadrata duo GN, MN æqualia quadrato ex ipſa MG. Hinc erit NR quadratum æquale quadrato ex MG: & propterea duæ NR, MG æquales erunt inter ſe.

Hujus autem proprietatis ope, *datis axe, & focis, facile erit invenire longitudinem ordinatæ, quæ cuilibet axis abſciſſæ correſpondet*. Sit enim axis AB, ſintque G, & H foci. Et oporteat invenire ordinatam, quæ correſpondet abſciſſæ AN.

Erigantur ex punctis A, & B ad partes contrarias perpendiculares AX, BZ, quæ fiant æquales ipſis AG, BG. Tum, juncta XZ, erigatur ex puncto N perpendicularis al-

altera NR, ei occurrens in R. Denique centro G, & intervallo ipſius NR deſcribatur arcus, eandem NR ſecans in M; & erit MN ordinata quæſita.

IV. *De hyperbolæ directrice, & de illius relate ad iſtam præcipuis proprietatibus.* Fig. 54.

IV. Iiſdem, ut ſupra, manentibus, erigatur modo ex puncto T, in quo tangens ET ſecat axem AB, perpendicularis ad ipſum axem TV. Et quemadmodum perpendicularem iſtam TV hyperbolæ *directricem* deinceps appellabimus; ſic *relate ad eam plures hyperbolæ proprietates competunt*.

Nimirum primo, demiſſa ad directricem perpendiculari EF, erit, ut EF ad EG, ita AT ad AG. Nam, ob parallelogrammum FG, duæ EF, GT inter ſe ſunt æquales. Quare erit, ut EF ad EG, ita GT ad EG. Sed, ob triangula æquiangula TGE, TAX, GT eſt ad EG, ut AT ad AX. Et, ob æquales AX, AG, ut eſt AT ad AX, ita eſt AT ad AG. Quare erit ex æquali, ut EF ad EG, ita AT ad AG.

Secundo, demiſſa ex alio quovis hyperbolæ puncto M ad eandem directricem perpendiculari MS, erit, ut MS ad MG, ita AT ad AG. Nam, ducta ad axem ordinata MN, eaque producta ad tangentem uſque in puncto R; erit, ut TN ad NR, ita AT ad AX, ſive AG. Sed TN eſt ad NR, ut MS ad MG; quum ſint æquales, tam duæ TN, MS, quam duæ NR, MG. Igitur erit ex æquali, ut MS ad MG, ita AT ad AG.

Tertio, id verum erit etiam relate ad alium axis verticem B; quandoquidem erit, ut BT ad BG, ita AT ad AG. Nam, ob triangu-

In æquiangula TBZ, TAX, ut eſt BT ad BZ, ita eſt AT ad AX. Sed, ex ſuperius oſtenſis, æquales ſunt inter ſe, tam duæ AX, AG, quam duæ BZ, BG. Quare erit quoque ut BT ad BG, ita AT ad AG.

Quarto, ſi duo in hyperbola capiantur puncta M, & P, & ex iis perpendiculares ad directricem demittantur MS, PQ; erit, ut MS ad PQ, ita MG ad PG. Nam in eadem ratione, quam habet AT ad AG, eſt, tam MS ad ad MG, quam PQ ad PG. Igitur erit ex æquali, ut MS ad MG, ita PQ ad PG; & permutando erit etiam, ut MS ad PQ, ita MG ad PG.

Denique, ſi ex iiſdem punctis M, & P ducantur ad directricem aliæ duæ rectæ MI, PL, quæ inter ſe ſint parallelæ; erit quoque ut MI ad PL, ita MG ad PG. Nam, ob triangula æquiangula MSI, PQL, ut eſt MI ad PL, ita eſt MS ad PQ. Sed, ex oſtenſis, MS eſt ad PQ, ut eſt MG ad PG. Igitur erit ex æquali, ut MI ad PL, ita MG ad PG.

V. *Circa proprietatem præcipuam hyperbolæ relate ad directricem monita duo.* FIG. 54.

V. Recta igitur, quæ ex quolibet hyperbolæ puncto perpendiculariter demittitur ad directricem, eſt ad rectam, quæ ex eodem puncto ducitur ad focum G, in eadem illa ratione, quam habet AT ad AG. Sed *circa proprietatem iſtam duo occurrunt, notatu digna.*

Primum eſt, quod ratio, quam habet AT ad AG, ſit minoris ad majus: adeo nempe, ut perpendicularis demiſſa ad directricem ſit ſemper minor recta, quæ ducitur ad focum G. Ob tangentem enim ET, ut eſt CT ad CA, ita eſt CA ad CG. Quare, ſubducendo ante-

Digitized by Google

tecedentes ex conſequentibus, erit quoque, ut CT ad AT, ita CA ad AG. Jam vero CT minor eſt, quam CA. Et igitur AT etiam minor erit, quam AG.

Alterum eſt, quod eadem illa ratio ſit æqualis ei, quam habet axis AB ad diſtantiam, quæ inter utrumque focum exiſtit. Nam, ob tangentem ET, ut eſt CT ad CA, ita eſt CA ad CG. Quare, ſubducendo antecedentes ex conſequentibus, erit, ut AT ad CA, ita AG ad CG; & permutando erit quoque, ut AT ad AG, ita CA ad CG. Jam vero CA eſt ad CG, ut AB ad GH. Et igitur ex æquali AT erit ad AG, ut eſt AB ad GH.

VI. Ad directricem hyperbolæ alia etiam proprietas pertinet valde ſingularis. Sed ad eam oſtendendam, *ſternendum eſt prius, velut lemma, ſequens theorema*, quod ſi ad aliquod hyperbolæ punctum M ducatur tangens MS, conveniens cum axe AB in puncto S, & ex puncto contactus M demittatur ad eundem axem ordinata MO; quod, inquam, CG ſit ad CO, ut eſt CS ad CT. VI. *Lemma pro oſtendenda ſingulari hyperbolæ relate ad directricem proprietate.* FIG. 55.

Quum enim recta ET contingat hyperbolam, & ex puncto contactus E ducta ſit ad axem ordinata EG; erit, ex ſuperius oſtenſis, ut CT ad CA, ita CA ad CG: proindeque rectangulum ex CT in CG æquale erit quadrato, quod fit ex CA.

Similiter, quoniam recta MS eſt tangens hyperbolæ, & ex puncto contactus M ducta eſt ad axem ordinata MO; per ea, quæ ſuperius oſtenſa ſunt, erit, ut CS ad CA, ita CA ad CO. Quare rectangulum ex CS in CO æquale

le erit quadrato, quod ſit ex CA.

Eidem igitur CA quadrato æquale eſt, tam rectangulum ex CT in CG, quam rectangulum ex CS in CO. Quare erit rectangulum ex CT in CG æquale rectangulo ex CS in CO: & propterea erit, ut CG ad CO, ita CS ad CT.

VII. *Lemmatis præcedentis corollarium primum.* FIG. 55.

VII. Hinc autem *ſequitur primo*, quod ſi eadem tangens MS conveniat cum directrice TV in puncto K, & cum axe conjugato PQ in puncto R; rectangulum ex MO in TK ſit ad CP quadratum, ut eſt GO ad CG.

Quum enim CG ſit ad CO, ut eſt CS ad CT; erit convertendo, ut CG ad GO, ita CS ad TS. Sed, ob triangula æquiangula CRS, TKS, CS eſt ad TS, ut CR ad TK. Quare erit ex æquali, ut CR ad TK, ita CG ad GO; & invertendo erit etiam, ut TK ad CR, ita GO ad CG.

Præterea, demiſſa ad axem conjugatum PQ ordinata ML; erit, ob tangentem MR, ut CR ad CP, ita CP ad CL. Unde rectangulum ex CR in CL, ſive MO æquale erit quadrato, quod ſit ex CP: & propterea rectangulum ex MO in TK erit ad CP quadratum, ut eſt idem rectangulum ex MO in TK ad rectangulum ex CR in MO.

Jam, ob communem altitudinem MO, rectangulum ex MO in TK eſt ad rectangulum ex CR in MO, ut eſt TK ad CR. Oſtenſum eſt autem, TK eſſe ad CR, ut eſt GO ad CG. Quare erit ex æquali, ut rectangulum ex MO in TK ad rectangulum ex CR in MO, ita GO ad CG; & conſequenter in hac

ca-

Digitized by Google

eadem ratione erit etiam rectangulum ex MO in TK ad CP quadratum.

VIII. Unde *ſequitur ſecundo*; rectangulum ex MO in TK æquale eſſe rectangulo TGO; atque adeo eſſe, ut TG ad TK, ita MO ad GO. VIII. *Corollarium ſecundum.* Fig. 55.

Quum enim recta ET contingat hyperbolam, & ex puncto contactus E demiſſa ſit ad axem ordinata EG; erit, ex ſuperius oſtenſis, rectangulum TGC æquale rectangulo AGB. Sed rectangulum AGB adæquat quartam partem figuræ axis AB, ſive etiam quadratum, quod fit ex CP, dimidio axis conjugati. Quare rectangulum TGC eidem CP quadrato pariter æquale erit.

Hinc erit, ut rectangulum TGO ad rectangulum TGC, ita idem rectangulum TGO ad CP quadratum. Sed, ob communem altitudinem TG, rectangulum TGO eſt ad rectangulum TGC, ut eſt GO ad GC. Quare erit ex æquali, ut GO ad GC, ita rectangulum TGO ad CP quadratum.

Et quoniam oſtenſum eſt, GO eſſe ad GC, ut eſt rectangulum ex MO in TK ad CP quadratum; erit rurſus ex æquali, ut rectangulum ex MO in TK ad CP quadratum, ita rectangulum TGO ad idem CP quadratum. Unde rectangulum ex MO in TK æquale erit rectangulo TGO.

IX. Atque hinc *ſequitur demum*, quod junctis rectis GK, GM; rectus ſit angulus KGM, quod ſub iis continetur. IX. *Corollarium tertium.* Fig. 55.

Quum enim oſtenſum ſit rectangulum ex MO in TK æquale rectangulo TGO; erit,

ut

ut TG ad TK, ita MO ad GO. Unde triangula duo rectangula GTK, MOm habebunt circa angulos rectos latera proportionalia; & conſequenter æquiangula erunt.

Angulus igitur TGK æqualis erit angulo GMO. Unde, appoſito communi OGM, erunt duo anguli TGK, OGM æquales duobus angulis GMO, OGM. Sed iſti duo ſimul ſumpti unum rectum adæquant. Quare etiam uni recto æquales erunt priores duo; atque adeo angulus KGM ex iis compoſitus pariter rectus erit.

X. *Hyperbolæ relate ad directricem ſingularis proprietas demonſtratur.* Fig. 55.

X. His præmiſſis, *facile modo erit oſtendere proprietatem illam ſingularem, quæ pertinet ad directricem hyperbolæ*. Illiuſmodi proprietas hæc eſt, quod ſi per focorum alterum G ducatur recta MN, utrinque ad hyperbolam terminata, & rectæ MS, NX contingant hyperbolam in punctis M, & N; tangentes iſtæ ſuper directrice TV ſibi mutuo occurrant.

Si enim fieri poteſt, ſecent tangentes illæ directricem TV in punctis diverſis: nimirum tangens quidem MS in puncto K, tangens vero NX in puncto I. Tum jungantur rectæ GK, GI.

Et quoniam recta MK eſt tangens hyperbolæ, eaque occurrit directrici in puncto K; erit angulus KGM rectus; adeoque rectus pariter angulus KGN, qui ad partem alteram exiſtit.

Eadem ratione, quia recta NX eſt tangens hyperbolæ, eademque ſecat directricem in puncto I, erit angulus IGN ſimiliter rectus. Unde duo anguli KGN, IGN æquales erunt

in-

inter ſe. Quod fieri non poteſt.

XI. Hinc vero *alia etiam proprietas valde elegans fluit* : nimirum, quod ſi per foco- rum alterum G ducatur recta MN, utrinque ad hyperbolam terminata; & actis tangentibus MK,NK,ſibi mutuo occurreutibus in K, jungatur recta GK; hæc perpendicularis eſſe debeat ad ipſam MN.

XI. *Alia hyperbolæ relate ad directricem elegans proprietas oſtenditur.* FIG. 56.

Referat namque recta TV directricem hyperbolæ. Et, per oſtenſam proprietatem, in ea locabitur punctum K, in quo tangentes duæ ſibi mutuo occurrunt. Unde per ea, quæ paulo ante oſtenſa ſunt, omnino neceſſe eſt, ut rectus ſit uterque angulorum KGM, KGN; atque adeo, ut ipſa GK perpendicularis ſit ad rectam MN.

Hoc idem erui quoque poteſt ex proprietate illa generali, ſuperius oſtenſa, quod recta GK bifariam dividat angulum, contentum ſub rectis GM, GN. Inde enim ſequitur, eandem rectam GK æquales ſemper angulos conſtituere cum rectis GM, GN; atque adeo rectos eſſe angulos illos, ubi ipſæ GM, GN jacent in directum.

XII. Cæterum ex iis, quæ modo oſtenſa ſunt, *datis focis, & directrice, nullo negotio ducetur tangens ad quodlibet hyperbolæ punctum*. Referat enim recta TV directricem hyperbolæ, ſintque foci ejuſdem puncta G, & H. Oportet ad punctum N tangentem ducere.

XII. *Quomodo datis directrice, & focis hyperbolæ duci poſſit tangens ad punctum datum.* FIG. 56.

Ad focorum alterum G ducatur ex puncto N recta NG. Tum ei ex eodem foco G perpendicularis erigatur GK, conveniens cum directrice in puncto K. Junganturdeni-

que

que puncta N, & K per rectam NK. Et erit recta iſta NK tangens quæſita.

Si enim fieri poteſt, contingat hyperbolam in puncto N recta quævis alia NI, quæ conveniat cum directrice in puncto I. Tum ex foco G ad punctum I ducatur recta GI. Et, ex oſtenſis, rectus erit angulus IGN. Sed ex constructione rectus etiam eſt angulus KGN. Quare duo anguli IGN, KGN æquales inter ſe erunt. Quod fieri non poteſt.

C A P. V.

Oſtenduntur proprietates generales, ad parabolæ focum pertinentes.

I. *Qui ſit parabolæ focus, & cur in ea unicus tantum reperiatur.* FIG. 57.

I. IN parabola quoque vocatur focus, ſeu umbilicus, *illud axis punctum, cui ordinata correſpondens ſemiſſem parametri ejuſdem axis adæquat.*

Ita, ſi AB ſit axis parabolæ AM, & AD parameter ejus; capiaturque in axe illo AB punctum G adeo quidem, ut ordinata ei correſpondens EG adæquet ſemiſſem ipſius AD; dicetur punctum G focus, ſeu umbilicus ipſius parabolæ.

Mirum autem videri non debet, quod quum in ellipſi, & hyperbola duo ſint foci, ſeu umbilici, in parabola tamen nonniſi unicus reperiatur. Id namque pendet ex eo, quod alter axis vertex in parabola eſt in infini-

Digitized by Google

finita a priore diſtantia.

II. Ex ipſa autem foci definitione liquet, *diſtantiam ejus a vertice axis quadrantem parametri ejuſdem axis adæquare*. Maneant enim omnia, ut ſupra. Dico, portionem axis AG æqualem eſſe quartæ parti ipſius AD. II. *Foci parabolæ prima proprietas generalis.* Fig. 57.

Nam, propter parabolam, EG quadratum eſt æquale rectangulo DAG. Quare erit, ut AG ad EG, ita EG ad AD. Sed ex conſtructione EG ſemiſſis eſt ipſius AD. Itaque etiam AG ſemiſſis erit ipſius EG. Ex quo fit, ut eadem AG adæquet quadrantem totius parametri AD.

III. Ducatur nunc ad verticem A tangens AX, quæ conveniat cum alia quavis tangente MX in puncto X. Et *facile erit oſtendere*, quod recta GX, ducta ex foco G ad punctum X, perpendicularis ſit ad tangentem MX. III. *Foci parabolæ ſecunda proprietas generalis.* Fig. 57.

Extendatur etenim tangens MX, uſque donec conveniat cum AB in puncto T, & ex puncto contactus M demittatur ad axem ordinata MN. Jamque erit, ut NT ad AT, ita MN ad AX. Sed, ob æquales AT, AN, eſt NT dupla ipſius AT. Quare etiam MN dupla erit ipſius AX: & propterea MN quadratum quadruplum erit quadrati, quod fit ex AX.

Quoniam vero AG quadrans eſt ipſius AD, erit rectangulum DAN quadruplum quoque rectanguli GAT. Unde erit, ut MN quadratum ad AX quadratum, ita rectangulum DAN ad rectangulum GAT. Sed, propter parabolam, MN quadratum eſt æquale rectangulo DAN. Quare etiam AX quadratum æquale

quale erit rectangulo GAT : & propterea angulus TXG rectus erit.

IV. *Foci parabolæ tertia proprietas generalis.* FIG. 57.

IV. Hinc autem *ſequitur quoque*, rectam GM, conjungentem punctum contactus M cum foco G, æqualem eſſe axis portioni GT, quæ inter focum, & tangentem exiſtit.

Quum enim recta MT contingat parabolam, & ex puncto contactus M ducta ſit ad axem ordinata MN; erunt portiones duæ AT, AN æquales inter ſe. Sed AT eſt ad AN, ut TX ad MX. Quare duæ TX, MX etiam æquales erunt.

Hinc duo triangula TGX, MGX habebunt duo latera TX, GX æqualia duobus lateribus MX, GX, alterum alteri. Sed æquales quoque ſunt anguli, ſub iis lateribus comprehenſi; quum uterque ſit rectus. Quare eorundem baſes GT, GM pariter æquales erunt.

V. *Foci parabolæ quarta proprietas generalis.* FIG. 57.

V. Atque hinc *ſequitur etiam*, quod ſi extendatur tangens MX verſus Z, & per punctum contactus M ducatur recta MH, parallela axi AB, æquales ſint anguli, quos rectæ GM, MH conſtituunt cum tangente XZ.

Quum enim duæ GT, GM inter ſe ſint æquales, triangulum TGM iſoſceles erit; adeoque erit angulus GTM æqualis angulo GMT. Sed, propter parallelas AB, MH, idem angulus GTM æqualis etiam eſt angulo HMZ. Quare duo anguli GMT, HMZ æquales erunt inter ſe.

VI. *Foci parabolæ quinta proprietas generalis.* FIG. 57.

VI. Exinde *deducitur præterea*, rectam GM adæquare quadrantem parametri, quæ refertur ad diametrum, tranſeuntem per punctum contactus M.

Quum

Quum enim rectus ſit angulus TXG; erit, tam AX quadratum æquale rectangulo TAG, quam TX, ſeu MX quadratum æquale rectangulo ATG. Unde AX quadratum erit ad MX quadratum, ut eſt rectangulum TAG ad rectangulum ATG; ſive etiam, ut eſt AG ad TG, ſeu GM.

Et quoniam, ex ſuperius oſtenſis, AX quadratum eſt ad MX quadratum, ut parameter axis AB ad parametrum diametri MH; erit in hac eadem quoque ratione AG ad GM: & propterea, quemadmodum AG quadrantem adæquat parametri, quæ refertur ad axem AB, ita GM æqualis erit quartæ parti parametri, quæ refertur ad diametrum MH.

VII. Foci parabolæ ſexta proprietas generalis.

VII. Demittatur ex puncto contactus M ad axem AB ordinata MN. Et *exinde colligitur pariter*, eandem rectam GM æqualem eſſe duabus AN, AG ſimul ſumptis. Fig. 57.

Portiones namque duæ AT, AN, ob tangentem MT, inter ſe ſunt æquales. Quare, appoſita communi AG, erit tota GT æqualis duabus AN, AG ſimul ſumptis. Sed GM oſtenſa eſt æqualis ipſi GT. Quare iiſdem AN, AG ſimul ſumptis etiam GM æqualis erit.

Id quum ita ſit, ſi extendatur axis AB verſus verticem A uſque ad punctum F: ita, ut duæ AF, AG inter ſe ſint æquales; erit GM æqualis ipſi FN. Nam, ob æquales AF, AG, eſt FN æqualis ſummæ duarum AN, AG. Sed eidem ſummæ æqualis eſt etiam GM. Quare duæ GM, FN equales erunt inter ſe. Fig. 58.

VIII. Alia para-

VIII. Hinc vero *alia nobis ſuboritur ra-*

bolam in plano deſcribendi ratio, datis axe, & foco. *tio deſcribendi parabolam in plano, datis axe, & foco*. Sit enim AB axis parabolæ, ſitque punctum G ejuſdem focus, ſeu umbilicus.

FIG. 58. Oportet, in ſubjecto plano parabolam deſcribere.

Extendatur axis AB uſque ad punctum F: ita, ut duæ AF, AG inter ſe ſint æquales; & ex puncto F perpendicularis erigatur FH. Sit deinde HL regula quævis, ipſi FH normaliter inſiſtens. Et ſumpto filo ejuſdem cum regula longitudinis, alligentur extrema ejus punctis G, & L.

Feratur poſtea regula HL ſuper ipſa FH, ea quidem lege, ut ei maneat ſemper perpendicularis, atque adeo parallela axi AB. Et, ope ſtili, una cum regula feratur etiam filum, ſed ita tamen, ut portiones ejus maneant continuo tenſæ. Dico, curvam, quæ per ſtilum in ſubjecto plano deſcribitur, eſſe parabolam quæſitam.

Jam enim ex ipſa curvæ deſcriptione liquet, ejus naturam hanc eſſe, ut ſi ex aliquo ejus puncto M demittatur ad axem AB perpendicularis MN, duæ GM, FN inter ſe ſint æquales. Sed FN eſt æqualis ſummæ duarum AN, AG. Quare eidem ſummæ æqualis quoque erit GM: & propterea curva deſcripta erit parabola.

Perſpicuum eſt autem, parabolam, quæ præfata ratione deſcribitur, neceſſario tranſire per punctum A, verticem axis AB. Pateteque etiam, eo majorem parabolæ portionem expoſita ratione deſcribi, quo longior aſſumitur regula HL.

IX. Sed

Digitized by Google

IX. Sed ex iis, quæ modo oſtenſa ſunt, rurſus liquet *veritas ejus, quod alia ratione alibi demonſtravimus*: nimirum, quod parameter cujuſvis diametri MH ſuperet parametrum axis AB per quadruplum abſciſſæ AN. IX. *Theorema circa parametros ſuperius oſtenſum alia ratione demonſtratur.*

Quum enim GM ſit æqualis duabus AG, AN ſimul ſumptis; erit AN differentia duarum GM, AG: & propterea quadruplum rectæ GM ſuperabit quadruplum rectæ AG per quadruplum ipſius AN. FIG. 57.

Quoniam autem GM eſt quadrans parametri, quæ refertur ad diametrum MH; erit quadruplum ejuſdem GM parameter integra ejuſdem diametri. Et ſimiliter, quia AG eſt quarta pars parametri, quæ refertur ad axem AB; erit quadruplum ejuſdem AG ipſa axis parameter.

Unde, quum quadruplum rectæ GM ſuperet quadruplum rectæ AG per quadruplum abſciſſæ AN; omnino neceſſe eſt, ut parameter diametri MH ſuperet parametrum axis AB per quadruplum ejuſdem abſciſſæ AN.

X. Sit nunc recta MT aliqua tangens parabolæ, conveniens cum axe AB in puncto T. Erigatur ſuper ea perpendicularis MO, eidem axi occurrens in O. Et *circa perpendicularem iſtam duo licebit oſtendere.* X. *Proprietates, pertinentes ad perpendicularem, quæ ex puncto contactus ducitur ad tangentem.*

Primum eſt, quod ſi per punctum contactus M ducatur recta MH, parallela axi AB, ea bifariam dividat angulum GMH, contentum ſub rectis GM, MH. Nam rectæ GM, MH conſtituunt cum tangente MT angulos æquales. Sed æquales quoque ſunt anguli, FIG. 57.

quos cum eadem tangente efficit perpendicularis MO. Quare erit angulus GMO æqualis angulo HMO.

Alterum eſt, quod duæ axis portiones TG, OG inter ſe ſint æquales. Nam per ea, quæ ſuperius oſtenſa ſunt, portio NO ſemiſſem adæquat ipſius AD; adeoque dupla eſt portionis AG. Sed, propter tangentem MT, etiam portio NT dupla eſt ipſius AT. Quare erit tota TO dupla totius TG: & propterea, quum TO ſecta ſit bifariam in G, portiones duæ TG, OG æquales erunt inter ſe.

XI. *Ejuſdem perpendicularis ſingularis quædam proprietas oſtenditur.* FIG. 57.

XI. Meretur autem, ut *ſpeciatim oſtendatur ſequens proprietas*: nimirum, quod ſi ex puncto O demittatur ſuper rectam GM perpendicularis OR, abſciſſa portio MR ſit æqualis dimidio parametri AD, quæ refertur ad axem AB.

Nec ſane difficile erit, eam oſtendere. Quum enim duæ TG, OG imter ſe ſint æquales, ſitque TG æqualis ipſi GM; erunt duæ GM, OG pariter æquales inter ſe:proindeque anguli GMO, GOM etiam æquales erunt.

Hinc triangula duo rectangula OMR, ONM æquiangula erunt: & propterea, quum ſit, ut MO ad MR, ita MO ad NO; erunt duæ MR, NO æquales inter ſe. Sed NO ſemiſſis eſt ipſius AD. Quare etiam MR ſemiſſis erit ejuſdem AD.

XII. *Foci parabolæ alia proprietas generalis.* FIG. 59.

XII. Præterea *pertinet ad focum parabolæ hæc alia proprietas*, quod ſi duæ tangentes MK, NK conveniant in K, & ex foco G ducantur ad puncta contactus rectæ GM, GN, angulus MGN bifariam ſit ſectus per rectam GK,

Jun-

Jungantur enim puncta M, & N per rectam MN, cui per focum G parallela agatur OR, conveniens cum utraque tangente in punctis O, & R. Sit porro EF diameter, quæ biſecat rectam MN, eamque velut ſuam ordinatam agnoſcit. Et per verticem ejus E eidem MN parallela ducatur XZ, quæ ſimiliter tangentibus occurrat in punctis X, & Z.

Quia igitur diameter EF tranſire debet per punctum K, in quo tangentes duæ MK, NK ſibi mutuo occurrunt; erit XZ bifariam ſecta in puncto E: proindeque erit, ut EK ad EX, ita EK ad EZ. Sed, productis tangentibus, uſque donec axi occurrant in punctis T, & S, EK eſt ad EX, ut TG ad GO; itemque EK eſt ad EZ, ut SG ad GR. Quare erit ex æquali, ut TG ad GO, ita SG ad GR; & permutando erit etiam, ut TG ad SG, ita GO ad GR.

Jam, ob tangentes MT, NS, æquales ſunt inter ſe, tam duæ TG, GM, quam duæ SG, GN. Unde, quum ſit, ut TG ad SG, ita GM ad GN; erit rurſus ex æquali, ut GO ad GR, ita GM ad GN. Sed, producta GK, uſque donec ipſi MN occurrat in L, GO eſt ad GR, ut ML ad NL. Quare erit denuo ex æquali, ut GM ad GN, ita ML ad NL: proindeque angulus MGN ſectus erit bifariam per rectam GK.

XIII. Sed *hanc aliam proprietatem nec etiam ſilentio præteribimus*, quod ſi per focum G ducatur recta PQ, utrinque ad parabolam terminata, ea ſit æqualis parametro illius diametri, quæ eandem PQ velut ſuam or- XIII. *Theorema de longitudine rectæ, per focum tranſeuntis.* FIG. 60.

ordinatam agnoſcit.

Sit enim EF diameter, ad quam PQ velut ordinata refertur, ſitque etiam EH parameter iſtius diametri. Oſtendendum eſt, duas PQ, EH æquales eſſe inter ſe.

Super axe AB demittatur perpendicularis EL. Jamque per ea, quæ ſuperius oſtenſa ſunt, parameter diametri EH æqualis erit parametro axis AD una cum quadruplo ipſius AL. Sed parameter AD quadrupla eſt ipſius AG. Quare eadem EH duabus AG, AL quater ſumptis æqualis erit.

Ducatur deinde per verticem axis A alia ad diametrum ordinata AO. Et quemadmodum æquales ſunt duæ AG, OR; ita etiam, ex oſtenſis, æquales erunt duæ AL, EO. Unde, quum duabus AG, AL æqualis ſit tota ER, erit EH æqualis quadruplo ipſius ER.

Quoniam autem, propter parabolam, EH eſt ad PR, ut PR ad ER; erit quoque, ut EH quadratum ad PR quadratum, ita EH ad ER. Unde, quemadmodum EH quadrupla eſt ipſius ER, ita etiam erit EH quadratum quadruplum quadrati, quod fit ex PR: proindeque EH ipſi PQ æqualis erit.

XIV. *Foci parabolæ extrema proprietas generalis.* FIG. 61.

XIV. Denique *hanc quoque proprietatem nolumus ſilentio committere*, quod ſi recta MT parabolam contingat in M, & ducta ex foco G ad punctum contactus M recta GM, huic per verticem axis A parallela agatur AX, cum tangente conveniens; quod, inquam, demiſſa ad axem ordinata MN, duæ AX, AN inter ſe ſint æquales.

Quum enim triangula duo TGM, TAX ſint

ſint æquiangula; erit, ut TG ad GM, ita TA ad AX. Sed per ea,quæ ſuperius oſtenſa ſunt, duæ TG, GM inter ſe ſunt æquales. Quare etiam æquales erunt duæ TA, AX: & propterea, quemadmodum TA æqualis eſt ipſi AN, ita quoque AX eidem AN æqualis erit.

Id quum ita ſit, liquet, differentiam duarum GM, AX eſſe eandem ubique: nimirum æqualem ipſi AG. Quum enim GM duabus AG, AN ſimul ſumptis ſit æqualis; erit AG diferentia duarum GM, AN. Quare, ob æquales AN, AX, eadem AG erit quoque differentia duarum GM, AX.

C A P. VI.

Oſtenduntur proprietates ſpeciales, ad parabolæ focum pertinentes.

I. OStenſis *proprietatibus generalibus*, ad parabolæ focum pertinentibus; reliquum modo eſt, ut eas oſtendemus, quæ *ſpeciales* ſunt, & ad illud dumtaxat punctum pertinent, quod per rectam axi perpendicularem cum foco conjungitur. I. *Foci parabolæ prima proprietas ſpecialis.* FIG. 62.

Sit igitur AB axis parabolæ, ſitque punctum G ejus focus, ſeu umbilicus. Erigatur ex eo perpendicularis ad axem GE, parabolæ occurrens in E. Tum ad punctum E ducatur tangens ET, cum eodem axe conveniens in T.

Ac primo quidem oſtendemus, quod erecta ex vertice A ad tangentem uſque perpendiculari AX, ea ſit æqualis portioni AG, abſciſſæ ex axe AB per focum G.

Jam enim AX parallela eſt ipſi EG. Quare eadem, ex oſtenſis, æqualis eſſe debet ei axis portioni, quam abſcindit ordinata, demiſſa ex puncto E. Sed, ex conſtructione ordinata iſta eſt ipſa EG. Itaque recta AX æqualis erit portioni AG.

Hoc idem oſtendi quoque poteſt in hunc modum. Quoniam AX, EX ſunt tangentes duæ; per ea, quæ ſuperius oſtenſa ſunt, ſecabitur angulus AGE bifariam per rectam GX. Unde, quum angulus AGE ſit rectus; erit ſemirecto æqualis, tam angulus AGX, quam angulus AXG; & conſequenter duæ AX, AG æquales erunt inter ſe.

II. *Foci parabolæ ſecunda proprietas ſpecialis.* FIG. 62.

II. Hinc autem *oſtendemus ſecundo loco*, quod ſi ex alio parabolæ puncto M ducatur ad axem AB ordinata MN, quæ conveniat, tam cum tangente, quam cum parabola ad partem alteram in punctis R, & O; rectangulum MRO ſit æquale quadrato, quod ſit ex interjecta axis portione GN.

Nam, per ſuperius oſtenſa, rectangulum MRO eſt ad quadratum tangentis ER, ut eſt parameter axis AB ad parametrum diametri, quæ tranſit per punctum E. Sed in hac eadem ratione eſt etiam quadratum tangentis AX ad quadratum tangentis EX. Quare erit ex æquali, ut rectangulum MRO ad ER quadratum, ita AX quadratum ad EX quadratum.

Jam,

Jam, permutando, rectangulum MRO erit ad AX quadratum, ut eſt ER quadratum ad EX quadratum. Sed, propter parallelas NR, EG, AX, ER quadratum eſt ad EX quadratum, ut GN quadratum ad AG quadratum. Quare erit rurſus ex æquali, ut rectangulum MRO ad AX quadratum, ita GN quadratum ad AG quadratum: & propterea, quemadmodum æqualia ſunt quadrata duo AX, AG, ita quoque erit rectangulum MRO æquale quadrato, quod fit ex GN.

III. *Foci parabolæ tertia proprietas ſpecialis.* FIG. 62.

III. Atque hinc *ſequitur tertio*, quod ſi jungatur punctum M cum foco G per rectam GM, hæc ſit ſemper æqualis rectæ NR, ubicumque ſumptum fuerit punctum M.

Jam enim rectangulum MRO oſtenſum eſt æquale quadrato, quod fit ex GN. Quare, appoſito communi quadrato ex MN, erit rectangulum MRO una cum MN quadrato æquale duobus quadratis GN, MN.

Quoniam autem MO eſt ſecta bifariam in puncto N; erit rectangulum MRO una cum MN quadrato æquale quadrato ex NR. Et quoniam angulus GNM eſt rectus, erunt quadrata duo GN, MN æqualia quadrato ex ipſa GM. Hinc erit NR quadratum æquale quadrato ex GM: & propterea duæ NR, GM æquales erunt inter ſe.

Hujus autem proprietatis ope, *datis axe, & foco, facile erit invenire longitudinem ordinatæ, quæ cuilibet axis abſciſſæ correſpondet*. Sit enim axis AB, ſitque G focus. Et oporteat, invenire ordinatam, quæ correſpondet abſciſſæ AN.

Eri-

Digitized by Google

Erigantur ex punctis A, & G perpendiculares AX, GE, quarum prior AX ſit æqualis ipſi AG, altera GE ſit dupla ejuſdem AG. Tum, juncta EX, erigatur ex puncto N perpendicularis altera NR, ei occurrens in R. Denique centro G, & intervallo ipſius NR deſcribatur arcus, eandem NR ſecans in M; & erit MN ordinata quæſita.

IV. *De parabola directrice, & de illius relate ad iſtam præcipuis proprietatibus.* FIG. 62.

IV. Iiſdem, ut ſupra, manentibus, erigatur modo ex puncto T, in quo tangens ET ſecat axem AB, perpendicularis ad ipſum axem TV. Et, quemadmodum perpendicularem iſtam TV parabolæ *directricem* deinceps appellabimus, ſic *relate ad eam plures parabolæ proprietates competunt.*

Nimirum primo demiſſa ad directricem perpendiculari EF, erit, ut EF ad EG, ita AT ad AG. Nam, ob parallelogrammum FG, duæ EF, GT inter ſe ſunt æquales. Quare erit, ut EF ad EG, ita GT ad EG. Sed, ob triangula æquiangula TGE, TAX, GT eſt ad EG, ut AT ad AX. Et, ob æquales AX, AG, ut eſt AT ad AX, ita eſt AT ad AG. Quare erit ex æquali, ut EF ad EG, ita AT ad AG.

Secundo, demiſſa ex alio quovis parabolæ puncto M ad eandem directricem perpendiculari MS, erit, ut MS ad MG, ita AT ad AG. Nam, ducta ad axem ordinata MN, eaque producta ad tangentem uſque in puncto R; erit, ut TN ad NR, ita AT ad AX, ſive AG. Sed TN eſt ad NR, ut MS ad MG; quum ſint æquales, tam duæ TN, MS, quam duæ NR, MG. Igitur erit ex æquali, ut MS,

ad

Digitized by Google

ad MG, ita AT ad AG.

Tertio, ſi duo in parabola capiantur puncta M, & P, & ex iis perpendiculares ad directricem demittantur MS, PQ; erit, ut MS ad PQ, ita MG ad PG. Nam in eadem ratione, quam habet AT ad AG, eſt, tam MS ad MG, quam PQ ad PG. Igitur erit ex æquali, ut MS ad MG, ita PQ ad PG; & permutando erit etiam, ut MS ad PQ, ita MG ad PG.

Denique, ſi ex iiſdem punctis M, & P ducantur ad directricem aliæ duæ rectæ MI, PL, quæ inter ſe ſint parallelæ; erit quoque, ut MI ad PL, ita MG ad PG. Nam, ob triangula æquiangula MSI, PQL, ut eſt MI ad PL, ita eſt MS ad PQ. Sed, ex oſtenſis, MS eſt ad PQ, ut eſt MG ad PG. Igitur erit ex æquali, ut MI ad PL, ita MG ad PG.

V. *Monitum circa principaliorem proprietatem parabolæ relate ad directricem.* FIG. 62.

V. Recta igitur, quæ ex quolibet parabolæ puncto perpendiculariter demittitur ad directricem, eſt ad rectam, quæ ex eodem puncto ducitur ad focum G, in eadem illa ratione, quam habet AT ad AG. Sed *circa proprietatem iſtam illud occurrit notatu dignum.*

Nimirum, quod ratio, quam habet AT ad AG, quemadmodum in ellipſi eſt majoris ad minus, & in hyperbola minoris ad majus, ſic in parabola ſit æqualitatis; adeoque perpendicularis, demiſſa ad directricem, erit ſemper æqualis rectæ, quæ ducitur ad focum G.

Neque vero difficile id erit oſtendere: Nam, ex conſtructione, recta ET contingit parabolam in E. Quare, quum EG incidat ex puncto contactus E perpendiculariter ſuper

axem

Digitized by Google

axem AB ; per ea , quæ ſuperius oſtenſa ſunt, omnino neceſſe eſt , ut duæ AT , AG inter ſe ſint æquales.

VI. *Lemma pro oſtendenda ſingulari parabolæ relate ad directricem proprietate.* FIG. 63.

VI. Ad directricem parabolæ alia etiam proprietas pertinet valde ſingularis . Sed ad eam oſtendendam , *ſternendum eſt prius, velut lemma , ſequens theorema* , quod ſi ad aliquod parabolæ punctum M ducatur tangens MS, conveniens cum axe AB in puncto S , & ex puncto contactus M demittatur ad eundem axem ordinata MO; quod, inquam , duæ TS, GO inter ſe ſint æquales.

Quum enim recta ET contingat parabolam , & ex puncto contactus E ducta ſit ad axem ordinata EG ; erunt duæ AT , AG æquales inter ſe . Et ſimiliter , quoniam recta MS eſt tangens parabolæ , & ex puncto contactus M ducta eſt ad axem ordinata MO ; erunt duæ AS , AO pariter æquales inter ſe Unde erit etiam differentia duarum AT , AS æqualis differentiæ duarum AG, AO; hoc eſt TS æqualis ipſi GO.

VII. *Lemmatis præcedentis corollarium primum.* FIG. 63.

VII. Hinc autem *ſequitur primo*; quod ſi eadem tangens MS conveniat cum directrice TV in puncto K, & ſuper tangente MS perpendicularis erigatur MP , rectangulum ex MO in TK ſit æquale rectangulo POG.

Quum enim triangulum PMS ſit rectangulum in M , & ex angulo recto demiſſa ſit ad hypothenuſam perpendicularis MO ; erit, ut PO ad MO, ita MO ad OS. Sed MO eſt ad OS, ut TK ad TS; & TK eſt ad TS, ut TK ad GO . Quare erit ex æquali , ut PO ad MO , ita TK ad GO : & propterea rectangu-

lum

lum ex MO in TK æquale erit rectangulo PGO.

VIII. Unde *ſequitur ſecundo*, quod idem rectangulum ex MO in TK ſit æquale quoque rectangulo TGO. VIII. *Corollarium ſecundum.* FIG. 63.

Quum enim recta MP ſit perpendicularis ad tangentem MS, erit portio axis PO æqualis dimidio parametri ejuſdem axis, & conſequenter dupla portionis AG. Sed, propter tangentem ET, ejuſdem AG dupla eſt quoque ipſa TG. Quare duæ PO, TG æquales erunt inter ſe.

Hinc æqualia erunt pariter rectangula POG, TGO. Sed rectangulum ex MN in TK oſtenſum eſt æquale rectangulo POG. Quare idem rectangulum ex MN in TK erit etiam æquale rectangulo TGO.

IX. Atque hinc *ſequitur demum*, quod junctis rectis GK, GM, rectus ſit angulus KGM, qui ſub iis continetur. IX. *Corollarium tertium.* FIG. 63.

Quum enim oſtenſum ſit, rectangulum ex MO in TK æquale rectangulo TGO; erit, ut TG ad TK, ita MO ad GO. Unde triangula duo rectangula GTK, MOG habebunt circa angulos rectos latera proportionalia; & conſequenter æquiangula erunt.

Angulus igitur TGK æqualis erit angulo GMO. Unde, appoſito communi OGM, erunt duo anguli TGK, OGM æquales duobus angulis GMO, OGM. Sed iſti duo ſimul ſumpti unum rectum adæquant. Quare etiam uni recto æquales erunt priores duo; atque adeo angulus KGM pariter rectus erit.

X. His præmiſſis, *facile modo erit oſtendere* X. *Parabola*

Digitized by Google

relate ad directricem ſingularis proprietas demonſtratur.

FIG. 63.

dere proprietatem illam ſingularem, quæ pertinet ad directricem parabolæ. Illiuſmodi proprietas hæc eſt, quod ſi per focum G ducatur recta MN, utrinque ad parabolam terminata, & rectæ MS, NX contingant parabolam in punctis M, & N; tangentes iſtæ ſuper diper directrice TV ſibi mutuo occurrant.

Si enim fieri poteſt, ſecent tangentes illæ directricem TV in punctis diverſis: nimirum tangens quidem MS in puncto K, tangens vero NX in puncto I. Tum jungantur rectæ GK, GI.

Et quoniam recta MK eſt tangens parabolæ, eaque occurrit directrici in puncto K; erit angulus KGM rectus; adeoque rectus pariter angulus KGN, qui ad partem alteram exiſtit.

Eadem ratione, quia recta NX eſt tangens parabolæ, eademque ſecat directricem in puncto I; erit angulus IGN ſimiliter rectus. Unde duo anguli KGN, IGN æquales erunt inter ſe. Quod fieri non poteſt.

XI.

Alia parabolæ relate ad directricem elegans proprietas oſtenditur.

FIG. 63.

XI. Hinc vero *alia etiam proprietas valde elegans fluit*; nimirum, quod ſi per focum G ducatur recta MN, utrinque ad parabolam terminata; & actis tangentibus MK, NK, ſibi mutuo occurrentibus in K, jungatur recta GK; hæc perpendicularis eſſe debeat ad ipſam MN.

Referat namque recta TV directricem parabolæ. Et, per oſtenſam proprietatem, in ea locabitur punctum K, in quo tangentes duæ ſibi mutuo occurrunt. Unde per ea, quæ paulo ante oſtenſa ſunt, omnino neceſſe eſt,

ut

Digitized by Google

ut rectus ſit uterque angulorum KGM, KGN, atque adeo, ut ipſa GK perpendicularis ſit ad rectam MN.

Hoc idem erui quoque poteſt ex proprietate illa generali, ſuperius oſtenſa, quod recta GK bifariam dividat angulum, contentum ſub rectis GM, GN. Inde enim ſequitur, eandem rectam GK æquales ſemper angulos conſtituere cum rectis GM, GN; atque adeo rectos eſſe angulos illos, ubi ipſæ GM, GN jacent in directum.

XII. Cæterum ex iis, quæ modo oſtenſa ſunt, *datis foco, & directrice nullo negotio ducetur tangens ad quodlibet parabolæ punctum.* Referat enim recta TV directricem parabolæ, ſitque punctum G focus ejuſdem. Oportet, ad punctum N tangentem ducere.

XII. *Quomodo datis directrice, & foco parabolæ duci poſſit tangens ad punctum datum.*

Ex foco G ad punctum N ducatur recta GN. Tum ei ex eodem foco G perpendicularis erigatur GK, conveniens cum directrice in puncto K. Jungantur denique puncta N, & K per rectam NK. Et erit recta iſta NK tangens quæſita. FIG. 63.

Si enim fieri poteſt, contingat parabolam in puncto N recta quævis alia NI, quæ conveniat cum directrice in puncto I. Tum ex foco G ad punctum I ducatur recta GI. Et, ex oſtenſis, rectus erit angulus IGN. Sed, ex conſtructione, rectus etiam eſt angulus KGN. Quare duo anguli IGN, KGN æquales inter ſe erunt. Quod fieri non poteſt.

LI-

Digitized by Google

LIBER VII.

De Locis Geometricis, Coni Sectionibus terminatis.

PRæcipuis ſectionum conicarum proprietatibus oſtenſis; ſequitur modo, ut compoſitionem aggrediamur locorum geometricorum, quæ conicis ſectionibus terminantur, quo nempe deinceps eaſdem coni ſectiones ad conſtructionem problematum ſolidorum traducere poſſimus. Sed priuſquam huic operi manum admoveamus, ratio poſtulat, ut paucis explicemus, quid veniat nomine loci geometrici; tum item, ut varias locorum ſpecies aperiamus, quas veteres Geometræ diſtinguebant.

CAP. I.

Quid loci geometrici nomine veniat, & quot ejus ſpecies diſtinguantur.

I. *De differentiis problematum geometricorum.*

I. LOcus geometricus vocatur *ſeries illa punctorum, quibus alicui problemati geometrico, indeterminate propoſito, ſatisfieri poteſt*. Unde non aliter intelligere licebit, quid veniat nomine loci geometrici, quam cognitis prius differentiis problematum geometricorum.

Hunc

Hunc in finem ſciendum eſt primo, *problemata geometrica, non ſecus ac omnia quævis, duplicis ſpeciei eſſe*: alia nimirum *determinata*, quæ ſolutionum diverſarum determinatum numerum admittunt; & alia *indeterminata*, quæ infinitis plane modis diverſis ſolvi poſſunt.

Ita, ſi punctum in recta quæratur, quod ſubinde eam dividat, ut rectangulum, ſub ſegmentis ejus contentum, alterius rectæ datæ quadratum adæquet: problema erit determinatum; quia duo tantum puncta licebit invenire, quibus quæſitæ diviſioni ſatisfiat: quæ etiam coibunt in unum, ſi altera recta data prioris ſemiſſem adæquet.

Sed, ſi oporteat, in data recta punctum invenire, quod adeo illam diſpeſcat, ut quadrata, quæ fiunt ex tota, & parte una, ſint æqualia rectangulo, bis contento ſub tota, & dicta parte, una cum quadrato partis alterius: problema erit indeterminatum; quia, ut oſtenſum eſt ab Euclide in Elementis, ſingula datæ rectæ puncta quæſitæ diviſioni ſatisfaciunt.

II. *Quid in omni problemate debeat contineri, & unde eorum genera oriantur.*

II. Ut hæc problematum geometricorum diſtinctio clarius intelligatur, ſciendum eſt inſuper, *in omni problemate duo neceſſario contineri*: ſcilicet notum, ſeu datum; & incognitum, ſeu quæſitum. Nam ea eſt finitæ noſtræ mentis indoles, ut quod incognitum eſt, dumtaxat ex cognitis quibuſdam conditionibus, eruere valeamus.

Jam, quemadmodum plerumque, præter conditiones, ad problematis ſolutionem neceſſarias, aliæ etiam adjunguntur, omnino

Digitized by Google

ſuperfluæ, & ut plurimum rejiciendæ, quo problematis ſolutio poſſit obtineri; ita quandoque nec omnes apponuntur conditiones, ad problematis ſolutionem neceſſariæ: qua ratione problema indeterminatum redditur, & infinitas ſolutiones diverſas admittet.

Ex quo liquet, problematum tria proprie genera dari: alia ſcilicet determinata, quæ omnes continent conditiones, ad ipſorum ſolutionem neceſſarias; alia indeterminata, in quibus non omnes adſunt conditiones, quæ ad eorum ſolutionem requiruntur; & alia demum plusquam determinata, in quibus multo plures conditiones ſunt appoſitæ, quam quæ illorum ſolutioni inſerviunt.

III. *Quomodo problematum genera ex datorum, quæſitorumq; numero dignoſcuntur.*

III. Sed notetur hic velim, quod *tria iſta problematum genera ex datorum, quæſitorumque numero nullo negotio dignoſcantur*. Ubi enim numerus datorum adæquat numerum quæſitorum; problema erit determinatum. Ubi vero data ſunt pauciora quæſitis; problema erit indeterminatum. Ac demum, ubi quæſita ſunt pauciora datis; problema erit pluſquam determinatum.

Ita, ſi rectangulum quæratur, quod ſit æquale dato quadrato, & cujus latera ſimul ſumpta datam rectam adæquent: problema erit determinatum; quia, ſicuti duo ſunt problematis data, ſic duo etiam ſunt ejuſdem quæſita: ſcilicet latera duo, quæ optatum rectangulum debent continere.

Sed, ſi ex eodem problemate auferatur una conditio, puta, quod latera rectanguli inveniendi debeant ſimul ſumpta datam rectam

adæ-

Digitized by Google

adæquare, & dumtaxat quæratur rectangulum, quod ſit æquale dato quadrato: problema erit indeterminatum; quia unum quidem eſt datum, quæſita vero ſunt duo.

Et denique, ſi eidem problemati, præter duas illas conditiones, adjungatur quoque tertia, veluti, quod latera rectanguli inveniendi debeant ad invicem datam rationem habere: problema erit pluſquam determinatum; quum in eo tria quidem ſint data, duo vero quæſita.

IV. Quum calculo litterali, ſeu ſpecioſo problematis reſolutio peragitur, *innoteſcit natura ejus, per numerum æquationum, quæ nobis ſeſe offerunt.* Si enim, perluſtratis ſingulis conditionibus, in problemate appoſitis, tot inveniuntur æquationes, quot occurrunt quantitates incognitæ; problema erit determinatum. Sed, ſi numerus æquationum minor ſit numero incognitarum; problema erit indeterminatum. Et denique idem problema erit pluſquam determinatum, ſi numerus æquationum incognitarum numerum excedat.

IV. Quomodo natura problematis innoteſcit per numerum æquationum, quæ nobis ſeſe offerunt.

Ut enim notum eſt, æquationes inveniuntur per ipſas conditiones, quæ in problemate apponuntur: adeo quidem, ut quælibet conditio ſuam nobis æquationem largiatur. Unde omnino neceſſe eſt, ut in problemate determinato tot æquationes inveniantur, quot fuerint incognitæ quantitates aſſumptæ; quandoquidem, pro determinandis ſingulis incognitis, tot in eo conditiones apponi debent, quotus eſt ipſe numerus incognitarum.

Digitized by Google

Ob eandem autem rationem in problemate indeterminato numerus æquationum minor eſſe debet numero incognitarum; quia in eo non omnes apponuntur conditiones, quæ ad determinationem ſingularum incognitarum requiruntur. Et vice verſa in problemate pluſquam determinato, ob conditiones ſuperfluas, quas habet appoſitas, neceſſe eſt, ut numerus æquationum incognitarum numerum excedat.

V. *Qua ratione Veteres problematum genera diſtinguebant, & quibus ea nominibus appellabant.*

V. Quemadmodum autem problema *proprie* vocatur illud, quod determinatum eſt, certiſque tantum modis ſolvi poteſt; ita inter problema indeterminatum, & problema pluſquam determinatum *illud diſcriminis ineſt*, quod primum, ob deficientes conditiones, ſit capax infinitarum ſolutionum; alterum, ob conditiones ſuperfluas, ſæpe ſæpius pugnantes cum neceſſariis, nullam ut plurimum ſolutionem admittat.

Has omnes problematum differentias ſatis explicat Proclus libro tertio ſuorum commentariorum in primum librum Elementorum Euclidis. Et, eodem referente, vocabant Veteres problema *deficiens*, quod indeterminatum eſt, nec omnes continet conditiones, ad ſolutionem ejus neceſſarias. Vocabant vero problema *excedens*, ſeu *redundans*, quod eſt pluſquam determinatum, & multo plures continet conditiones, quam quæ ad ſolutionem ejus requiruntur.

Sed *excedentium* problematum, ut idem Proclus eſt auctor, duas adhuc ſpecies Veteres diſtinguebant. Quæ enim problemata in-

con-

congruentibus, pugnantibuſque conditionibus redundant; *impoſſibilia* appellabant, quia omnino ſolvi non poſſunt. Quæ vero abundant conditionibus, ſibi mutuo conſpirantibus; dicebant problemata *majora*, ut ab indeterminatis diſtinguerentur, quæ *minora* viciſſim appellabant.

VI. *Quod problemata indeterminata ſolutioni problematum determinatorum inſerviunt.*

VI. Etſi autem iſtæ omnes ſint problematum differentiæ, attamen Geometræ *problematis nomine illud proprie vocant, quod determinatam eſt, certumque ſolutionum numerum admittit.* Nec alia ratione ea, quæ ſunt indeterminata, ſub ipſorum contemplationem veniunt, quam ut eorum ope determinatis ſatisfiat, quæ præcipuum Geometriæ objectum conſtituunt.

Quum enim problemata indeterminata infinitas ſolutiones admittant; utique inter eas neceſſe eſt, ut reperiantur ſolutiones peculiares problematum determinatorum, quæ ejuſdem ſpeciei ſunt. Unde, nactis ſemel infinitis illorum ſolutionibus, non aliud fieri debet, quum de iſtis eſt quæſtio, quam eas excerpere, quæ ipſis correſpondent, ſuaſque conditiones adimplent.

Ita, quotieſcumque, exempli gratia, ſuper recta data conſtituta ſunt omnia triangula iſoſcelia; omnino neceſſe eſt, ut inter ea reperiatur triangulum illud iſoſceles, quod habet quoque datam altitudinem. Unde, quum quæſtio eſt de conſtituendo triangulo iſoſcele, cujus data ſit, tam baſis, quam altitudo; ſatis erit, ad infinita illa triangula iſoſcelia confugere, & inter ea illud eligere, cui data competit altitudo.

VII. *Quorſum tendit compoſitio locorum geometricorum, oſtenditur.*

VII. Quum mens noſtra finita ſit, ac limitata; utique infinitas ſolutiones, quarum capax eſt problema aliquod indeterminatum, ſigillatim percurrere nequit. Hinc *ſpeciali quodam artificio* opus eſt, ut eæ omnes in unum colligi poſſint, atque ita collectæ continuo præſentes haberi. Præſtant id igitur Geometræ *compoſitione locorum geometricorum*; nam ea mediante infinitas illas ſolutiones certis limitibus claudunt.

Id ut clarius intelligatur, juvat prius advertere, nullum eſſe problema geometricum, quod ad puncti alicujus poſitionem determinandam revocari non poſſit. Unde, quotieſcumque problema eſt natura ſua indeterminatum, tunc infinita hujuſmodi puncta debent definiri: & propterea habebuntur infinitæ ejus ſolutiones, determinando locum, in quo infinita illa puncta reperiuntur.

Hac ratione, ſi ſuper data recta linea conſtituendum ſit triangulum iſoſceles; res eo redit, ut vertex ejus trianguli reperiatur. Quemadmodum autem infinita eſſe queunt illiuſmodi triangula, ita infinitus quoque erit numerus punctorum, quæ quæſitum verticem nobis exhibebunt. Sed perſpicuum eſt, omnia illa puncta reperiri in linea recta, quæ ſecat bifariam, & ad angulos rectos rectam lineam datam.

VIII. *Quid ſit locus geometricus, & quot locorum genera diſtingui poſſint*

VIII. Id quum ita ſit, liquet, *locum geometricum non aliud eſſe, quam ſedem omnium illorum punctorum, quæ alicui problemati indeterminato ſatisfaciunt*. Et quoniam hujuſmodi ſedes poteſt eſſe, vel linea, vel ſuperficies

cies, vel ſolidum; tria hinc locorum genera Veteres diſtinguebant, & eorum alia *ad lineam*, alia *ad ſuperficiem*, & alia demum *ad ſolidum* appellabant.

Ut tres iſtæ locorum ſpecies rectius intelligantur, meminiſſe oportet, problema eſſe indeterminatum, quum non omnes apponuntur conditiones, ad problematis ſolutionem neceſſariæ. Hinc itaque fit, ut non omnia loca geometrica ejuſdem ſpeciei ſint. Nam, deficiente una tantum conditione, locus erit ad lineam; deficientibus duabus conditionibus, locus erit ad ſuperficiem; & denique, ubi tres in problemate deſunt conditiones, locus erit ad ſolidum.

Poſſunt etiam tres iſtæ locorum ſpecies a ſe mutuo diſtingui per æquationem, quæ omnes ipſius problematis indeterminati conditiones includit. Ubi enim hujuſmodi æquatio duas continet incognitas, locus erit ad lineam; quia ad determinationem problematis una tantum conditio deeſt. Quotieſcumque vero in eadem æquatione tres occurrunt incognitæ, locus erit ad ſuperficiem; quia pro determinando problemate duæ requiruntur conditiones. Et denique, quum æquatio quatuor incognitas complectitur, locus erit ad ſolidum; quia tribus conditionibus opus eſt, ut problema determinatum evadat.

IX. Et ſane, quod *æquatio, duabus incognitis conſtans, loco ad lineam debeat explicari*, oſtendi poteſt generaliter in hunc modum. Sint x, & y binæ æquationis incognitæ. Jam utraque harum incognitarum infinitos valo- IX.

De loco ad lineam, & quomodo hujuſmodi locus oriatur.

res admittit. Sed una ex iis determinata, neceſſe eſt, ut altera quoque ſuam determinationem acquirat.

FIG. 64. Referant itaque portiones AN rectæ alicujus AB valores omnes incognitæ x. Et cuique earum correſpondebit incognita altera y determinato valore. Ducantur ergo per ſingula puncta N parallelæ totidem NM, quæ referant valores correſpondentes incognitæ y. Et linea, tranſiens per extremitates ipſarum NM, locus erit quæſitus.

Notetur autem hoc loco velim, quod quum ſimpliciter de explicanda æquatione agitur; angulus ANM poteſt ad libitum aſſumi. Sed, ſi una cum æquatione ſatisfaciendum ſit quoque problemati, unde ea fluxit æquatio; tunc angulus ille talis oportet magnitudinis capiatur, qualem ipſum exigit problema.

Nec ſilentio hic præteribimus, quod in priore caſu licebit quandoque angulum illum ANM talem aſſumere, ut rectæ NM, vel ſint in directum cum ipſis AN, vel cadant ad partem oppoſitam: nimirum, quum dando eis poſitionem iſtam, ad unum idemque punctum omnes terminantur. Sed non ideo locus dicendus erit *ad punctum*, ut qui per extremitates alias N proprie conſtituetur.

X. *De loco ad ſuperficiem, & qua ratione locus iſte producatur.*

X. Similiter, quod *æquatio, tribus incognitis conſtans, loco ad ſuperficiem debeat explicari*, oſtendetur generaliter hac ratione. Sint x, y, z tres æquationis incognitæ. Referant adhuc portiones AN rectæ alicujus AB valores omnes incognitæ x. Et cuique earum, FIG. 65.

tam

Digitized by Google

tam y, quam z infinitis adhuc valoribus correſpondebit.

Ductis igitur per ſingula puncta N parallelis NX, capiantur ſuper iis portiones NM, quæ referant infinitos valores, quibus incognita y ipſis AN correſpondet. Et quoniam cuique iſtarum NM correſpondet z determinato valore; erigantur ex punctis M parallelæ MO, quæ referant valores illos, & datum cum ſubjecto plano angulum conſtituant. Et ſuperficies, ad quam terminantur omnia puncta O, locus erit quæſitus.

Sed hic quoque notare oportet, quod quum ſimpliciter quæſtio eſt de explicanda æquatione; tunc ad libitum poteſt aſſumi, tam angulus ANM, quam angulus, quem rectæ MO cum ſubjecto plano conſtituunt. Verum, ſi una cum æquatione ſatisfaciendum ſit quoque problemati, unde ea fluxit æquatio; tunc uterque angulus talis oportet magnitudinis capiatur, qualem ipſum problema requirit.

Nec item hoc loco reticebimus, quod in priore caſu licebit quandoque angulum, quem rectæ MO cum ſubjecto plano conſtituunt, indefinite parvum aſſumere, & in eodem illo plano ducere rectas MO: nimirum, quum dando eis poſitionem iſtam, ad unam, eandemque lineam omnes, quotquot fuerint, terminantur. Sed non ideo locus dicendus erit *ad lineam*, ut qui per extremitates alias M proprie conſtituetur.

XI. Non diſſimili ratione oſtendemus quoque, quod *æquatio, quatuor conſtans incogni-* XI. *De loco ad ſolidum, &*

qualis ſit ortus ipſius. FIG. 66.

gnitis, debeat loco ad ſolidum explicari. Sint enim x, y, z, u quatuor æquationis incognitæ. Referant portiones AN rectæ alicujus AB valores omnes incognitæ x. Tum, ductis parallelis NX, deſignent portiones NM harum parallelarum infinitos valores, quibus incognita y ipſis AN correſpondet. Et cuique iſtarum NM tam z, quam u infinitis adhuc valoribus correſpondebit.

Erigantur ergo ex punctis M parallelæ MZ, quæ datum cum ſubjecto plano angulum conſtituant. Et capiantur ſuper iis portiones MO, quæ referant infinitos valores, quibus incognita z ipſis AN correſpondet. Quumque demum cuique iſtarum MO correſpondeat u determinato valore; ducantur ex punctis O parallelæ aliæ OR, quæ referant valores illos, datumque angulum conſtituant cum ipſis MO. Et ſolidum, inde ortum, illud erit, quod quæritur.

Sed notetur hic velim, hujuſmodi ſolidum tunc tantum uſui nobis eſſe, quum rectæ OR ad unam eandemque ſuperficiem omnes terminantur. Et ratio eſt, quia in ſolo iſto caſu, ope ejus ſolidi, propoſitæ æquationi ſatisfieri poteſt. Nec tamen idcirco locus dicendus erit *ad ſuperficiem*, ut qui non jam per puncta R, ſed per extremitates alias O proprie conſtituetur.

XII. *Conſtitutio cujuſvis loci geometrici paulo clarius oſtenditur.*

XII. Hinc, ut plenius natura loci geometrici intelligatur, ſciendum eſt ulterius, quod, ſicuti fit locus loco geometrico, quum æquatio, ex problemate orta, duas, aut plures continet incognitas; ſic *ipſius loci conſtitutio*

tio

tio talis eſſe debeat, ut per quodlibet ejus punctum omnes ſimul æquationis incognitæ determinentur.

Nec obſcura eſt hujus rei ratio. Debet ſiquidem unoquoque loci puncto fieri ſatis æquationi, ex problemate ortæ. Plane vero, quum æquatio pluribus conſtat incognitis, non aliter ei fiet ſatis, quam determinando ſimul ſingulas incognitas, quæ in illa continentur. Quare omnino neceſſe eſt, ut per quodlibet loci punctum omnes æquationis incognitæ ſimul definiantur.

Id quum ita ſit, facile modo erit intelligere, cur in loco ad ſolidum rectæ OR debeant ad unam, eandemque ſuperficiem omnes terminari, quo poſſit nobis uſui eſſe: nimirum, quia dumtaxat in hoc caſu quodlibet loci punctum potis eſt, definire ſimul omnes æquationis incognitas. Et quoniam hunc effectum præſtant puncta O; hinc etiam eſt, ut per hujuſmodi puncta proprie locus conſtituatur. Fig. 66.

Ob eandem autem rationem, quum in loco ad ſuperficiem rectæ MO ad unam, eandemque lineam omnes terminantur, conſtituetur locus per puncta M; quia iſta puncta ſumi debent, ut omnes æquationis incognitæ ſimul determinentur. Atque ita quoque, quum in loco ad lineam rectæ NM ad unum, idemque punctum omnes terminantur, conſtituent locum puncta N; quia his mediantibus utraque æquationis incognita ſimul definitur. Fig. 65. Fig. 64.

XIII. Quomodo tradita geneſis locorum caſibus

XIII. Jam, ut *demonſtrationes illæ generales caſibus ſpecialibus poſſint applicari*, non aliud requiritur, quam, ut in ſolutione cujuſ-

que

ſpecialibus debeat applicari. que problematis indeterminati pro incognitis capiantur rectæ illæ, quæ extremitatibus ſuis ſibi mutuo occurrunt, & occurſu illo datum angulum conſtituunt. Nam in tradita locorum geneſi non aliæ, quam iſtæ conditiones, exiguntur.

Fig. 67. 68. In plano aliquo detur, tum poſitione, cum magnitudine recta AB. Et extra eam oporteat invenire punctum aliquod, ita ut rectæ, quæ exinde inclinantur ad terminos ipſius AB, rectum angulum comprehendant. In hoc problemate duo caſus ſunt diſtinguendi. Vel enim inveniendum eſt punctum in eodem illo plano, in quo data eſt recta AB; vel extra planum illud tale punctum oportet invenire.

Fig. 67. In priore caſu ſit M punctum quæſitum, ex quo demittatur ſuper AB perpendicularis MN. Tum capiantur pro incognitis ipſæ AN, MN, quæ extremitatibus ſuis ſibi mutuo occurrunt, & occurſu illo rectum angulum conſtituunt. Quem in finem, poſita AB $= a$, fiat AN $= x$, & MN $= y$. Quumque, ob angulum rectum AMB, quadratum ex MN ſit æquale rectangulo ANB, erit $yy = ax - xx$ propoſiti problematis æquatio.

Fig. 68. In ſecundo caſu ſit O punctum, quod quæritur, ex quo demiſſa ad planum ſubjectum perpendicularis OM, ducatur ex puncto M ſuper AB perpendicularis alia MN. Et poſita adhuc AB $= a$, fiat AN $= x$, MN $= y$, & MO $= z$. Jungatur poſtea ON. Et quoniam eidem ON quadrato æquale eſt, tam rectangulum ANB, quam ſumma quadratorum MN, MO; erunt quadrata duo MN, MO æqua-

æqualia rectangulo ANB: & propterea problematis æquatio erit $yy + zz = ax - xx$.

In utroque autem caſu, perſpicuum eſt, problema eſſe indeterminatum, & locum fieri loco geometrico. Sed ex tradita locorum geneſi liquet etiam, locum eſſe ad lineam, quum æquatio problematis eſt $yy = ax - xx$; eſſe vero ad ſuperficiem, quum eadem æquatio eſt $yy + zz = ax - xx$. Nam illa quidem duas continet incognitas, in iſta vero tres incognitæ comprehenduntur.

XIV. Cæterum, *haud quidem putandum eſt, loca gemetrica expoſitis rationibus componi debere; ſed fiet eorum compoſitio, definiendo limites, quibus loca ipſa terminantur*. Ita in allato problemate, quum æquatio eſt $yy = ax - xx$, verum quidem eſt, quod capiendo ſuper AB valores omnes incognitæ x, & applitando eis ad angulos rectos valores correſpondentes alterius incognitæ y, oriatur locus ad lineam; nihilo tamen minus ejus compoſitio fiet, deſcribendo lineam, ad quam ipſe locus nos manuducit.

XIV. *Quo pacto locorum geometricorum compoſitio proprie peragi debeat.*

Fig. 67.

Simili ratione, quum ejuſdem problematis æquatio eſt $yy + zz = ax - xx$, etſi oriatur locus ad ſuperficiem, capiendo ſuper AB valores omnes incognitæ x, applicando eis ad rectos angulos valores correſpondentes incognitæ y, tumque demum erigendo normaliter ad ſubjectum planum valores tertiæ incognitæ z; attamen loci compoſitio fiet proprie, deſcribendo ſuperficiem, per quam locus ipſe terminatur.

Fig. 68.

Hinc locorum compoſitio duo quidem præ-

præſupponit. Primum eſt cognitio proprietatum, quæ lineis, ſuperficiebus, & ſolidis competunt. Alterum eſt ratio deſcribendi lineas, ſuperficies, & ſolida. Horum utrumque ad illam pertinet Geometriæ partem, quæ *Elementaris* appellatur. Et ea, quæ *de compoſitione locorum* ediſſerit, nonniſi poſt partem illam elementarem eſt addiſcenda: quæ tamen eo tendit, ut ope ejus partem Geometriæ nobiliorem, quæ *de ſolutione problematum* agit, tandem aſſequi liceat.

Tres iſtas Geometriæ partes, tum item alterius ad alteram ſubordinationem ſatis indicat Pappus initio libri ſeptimi ſuarum collectionum. Ibi enim ſcribens ad Filium Hermodorum: *locus*, inquit, *qui vocatur reſolutus, ut ſummatim dicam, propria quædam eſt materia, poſt communium Elementorum conſtitutionem, iis parata, qui in geometricis ſibi comparare volunt vim, ac facultatem inveniendi problemata, quæ ipſis proponuntur; atque hujus tantummodo utilitatis gratia inventa eſt*.

XV. *Qua ratione per calculum proprietates linearum, ſuperficierum, aut ſolidorum innoteſcunt.*

XV. Nolo autem hoc loco reticere, quod *calculi litteralis ope facile ſit quidem inquirere, num alicui lineæ, ſuperficiei, aut ſolido data quædam proprietas competat*. Si enim, adhibita ea proprietate, talis inveniatur æquatio, ut ab utraque parte eadem quantitas occurrat; indicio erit, illiuſmodi proprietatem revera ei competere. Quod ſi autem ſecus contigerit; nec item illa proprietas ad eam lineam, ſuperficiem, aut ſolidum poterit pertinere.

FIG. 67. Sit AB circuli alicujus diameter, cujus cen-

centrum ſit punctum C. Et quæratur, num demiſſa ſuper AB ex aliquo circumferentiæ puncto M perpendiculari MN, ſit MN quadratum æquale rectangulo ANB. Ponatur CA $= a$, CN $= x$, & MN $= y$. Quumque hac ratione fiat AN $= a - x$, & BN $= a + x$; erit rectangulum ANB $= aa - xx$. Quare poſito, quod MN quadratum ſit æquale rectangulo ANB, erit $yy = aa - xx$.

Jam, propter circulum, duæ CA, CM inter ſe ſunt æquales. Quare, ſicuti CM quadratum eſt æquale duobus quadratis CN, NM; ita iiſdem quadratis æquale quoque erit quadratum ex CA. Hinc erit $aa = xx + yy$. Et, poſito loco yy valore ejus $aa - xx$, erit quoque $aa = xx + aa - xx$, hoc eſt $aa = aa$. Unde, quum ab utraque æquationis parte eadem quantitas reperiatur; conſequens eſt, ut MN quadratum ſit revera æquale rectangulo ANB.

Hinc notetur hoc loco velim, quod ſi circa aliquam lineam, ſuperficiem, aut ſolidum proponatur problema aliquod, & in ejus reſolutione talis inveniatur æquatio, ut ab utraque parte eadem quantitas occurrat; tunc illud non erit problema, ſed theorema. Nam, ob illiuſmodi æquationem, id quod quæritur in problemate, verum erit relate ad quodlibet punctum ejus lineæ, ſuperficiei, aut ſolidi; adeoque velut proprietas ipſius univerſalis debet haberi.

CAP.

Digitized by Google

C A P. II.

De diviſione locorum ad lineam, & quomodo ea conſtrui poſſint.

I. *Quod loca ad lineam, pro qualitate linearum, in varias claſſes diſtingui poſſunt.*

I. QUamquam locorum geometricorum tria genera diſtinguantur, & eorum alia vocentur ad lineam, alia ad ſuperficiem, & alia demum ad ſolidum; in conſtructione tamen problematum determinatorum non alia loca a Geometris adhibentur, quam quæ prioris ſunt generis, & loca ad lineam dicuntur. Unde etiam, quum *ſimpliciter*, *&* *abſolute* loca vocant geometrica, non alia veniunt apud ipſos, quam quæ linearum longitudinibus terminantur.

Hujuſmodi autem loca *non omnia ejuſdem ſpeciei ſunt, ſed pro qualitate linearum, quas pro ſuis terminis habent, in varias claſſes diſtingui poſſunt*. Dantur enim loca nonnulla, quæ lineis rectis terminantur. Sed dantur etiam loca alia, quæ lineas curvas, velut ſuos terminos, agnoſcunt. Quumque lineæ curvæ poſſint eſſe infinitarum ſpecierum; infinita etiam erit diverſitas locorum, quæ lineis curvis circumſcribuntur.

Hinc, ut rectius intelligatur, qua ratione loca geometrica, lineis terminata, in certas claſſes diſtingui poſſint; operæ pretium eſt prius

Digitized by Google

prius oſtendere, quo pacto recentiores Geometræ naturam cujuſcumque lineæ definiunt, & quomodo omnem illarum molem in varia genera diſpeſcunt. Nam profecto ex variis generibus linearum, quibus loca terminantur, ſit, ut ipſa quoque loca in varios ordines diſtingui queant.

II. Itaque recentiores Geometræ non alia ratione *naturam cujuſque lineæ definiunt*, quam referendo ejus puncta omnia ad puncta alia rectæ alicujus poſitione datæ, & inveniendo æquationem, quæ relationem illam nobis oſtendat. Ut, ſi AM ſit linea, de qua agitur, ex ſingulis ejus punctis ducunt ad rectam aliquam poſitione datam AB parallelas totidem MN, & definiunt naturam illius per relationem, quam habet quælibet earum parallelarum MN ad portionem correſpondentem AN. II. *Quomodo natura cujuſque lineæ à recentioribus Geometris definiatur.* FIG. 69.

Supponatur namque, ſi placet, linea illa deſcripta per interſectionem duarum regularum AX, BZ, quæ ita quidem revolvantur circa puncta A, & B, ut erecta ſuper AB perpendiculari AC, ſit angulus ABZ perpetuo æqualis angulo CAX. Et fingamus quoque, rectas MN, quæ *ordinatæ* dicuntur, parallelas eſſe ipſi AC; adeoque perpendiculares ſuper portionibus AN, quæ vocantur *abſciſſæ*.

Quia igitur angulus ABZ æqualis eſt angulo CAX: appoſito communi BAX, erunt duo anguli ABZ, BAX æquales toti angulo BAC. Sed angulus BAC eſt rectus, ex hypotheſi. Quare etiam uni recto æquales erunt duo anguli ABZ, BAX: & propterea tertius angulus AMB etiam rectus erit. Unde, quum

Digitized by Google

ex angulo recto M demiſſa ſit ad hypothenuſam AB perpendicularis MN; erit MN quadratum æquale rectangulo ANB.

Hinc, quemadmodum abunde liquet, lineam AM eſſe circuli circumferentiam, diametrum habentem rectam AB; ita facile quoque erit, æquationem invenire, quæ exprimat nobis relationem inter unamquamque ordinatam MN, & abſciſſam correſpondentem AN. Ponatur enim AB $= a$, AN $= x$, & MN $= y$. Erit igitur reliqua portio BN $= a - x$. Et quoniam MN quadratum eſt æquale rectangulo ANB; erit $yy = ax - xx$ æquatio quæſita.

III. *Quod æquatio, exprimens lineæ naturam, non ſemper poſſit inveniri.* Fig. 70.

III. Sed nolo hic ſilentio reticere, quod *hujuſmodi æquatio, exprimens relationem inter ordinatas, & abſciſſas correſpondentes, non ſemper poſſit inveniri*. Sit enim quadratum ABCD. Et interea aclatus ejus AD fertur æquabiliter, & ſibi ipſi æquidiſtanter verſus BC, revolvatur motu etiam æquabili circa punctum B latus AB: adeo, ut in fine motus utrumque latus AD, AB reperiatur eodem tempore ſuper BC.

Quum ſic duo illa latera feruntur, perſpicuum eſt, continua eorum interſectione, deſcribi lineam curvam AME. Sed, demiſſis ex ſingulis ejus punctis rectis MN, perpendicularibus ſuper AB, fruſtra quæretur æquatio, exprimens relationem inter unamquamque ipſarum MN, & portionem correſpondentem AN; quum nulla adſit in deſcripta curva proprietas, quæ ad inveniendam æquationem illam nos manuducere poſſit.

De

Digitized by Google

Deſcriptæ ſiquidem curvæ natura, ut ex ipſa ejus geneſi liquet, hæc eſt, quod producta BM uſque donec quadrantem AC ſecet in O, ſit ſemper, ut AN ad BN, ita AO ad CO. Quare, poſitis AB $= a$, AN $= x$, & MN $= y$, determinanda eſſet ope iſtarum quantitatum ratio arcuum AO, CO, ut optata æquatio poſſet haberi. Unde, quum ratio iſta nequeat ullo pacto definiri, nec item optatam æquationem invenire licebit.

IV. Id quum ita ſit, *duo paſſim linearum genera diſtinguuntur, & ex iis aliæ dicuntur geometricæ, aliæ vero mechanicæ*. Prioris generis lineæ ſunt illæ, in quibus relatio ordinatarum ad abſciſſas correſpondentes æquatione aliqua poteſt definiri. Per contrarium vero lineæ alterius generis ſunt eæ, in quibus eadem illa relatio nulla poteſt æquatione deſignari.

IV. *Diſtinctio linearum in geometricas, & mechanicas explicatur.*

Hanc linearum diſtinctionem in geometricas, & mechanicas primus omnium protulit Carteſius. Nec alias in Geometriam admittendas eſſe cenſuit, quam quæ geometricarum nomen apud ipſum ſortitæ ſunt; quia eæ tantum ſub certam, determinatamque cadunt menſuram. Unde reliquas vocavit mechanicas; quia ad mechanicam potius eas pertinere judicavit.

Et ſane, quin lineæ, mechanicæ dictæ, valde differant ab iis, quæ paſſim geometricæ nuncupantur, non eſt dubitandum. Sed non ideo illiuſmodi curvæ a Geometria ſunt excludendæ, quemadmodum voluit Carteſius; quandoquidem, ſi mente concipiantur deſcriptæ, ha-

Digitized by Google

bebunt perinde, ac lineæ ipſæ geometricæ, conſtantes quaſdam proprietates, quæ ad omnia linearum puncta ſe extendent.

Huc adde, quod beneficio ejus analyſis, quæ dicitur *indefinite parvorum*, etiam in lineis mechanicis reperire licet æquationem, quæ exprimat relationem ordinatarum ad abſciſſas correſpondentes. Nec aliud ſane diſcriminis occurrit, quam quod in iis hujuſmodi æquatio ad infinitas ſemper dimenſiones aſcendat; quo factum, ut a nonnullis lineæ *tranſcendentes* dicerentur.

V.
Linearum in certa genera diſtributio Carteſiana affertur, & rejicitur.

V. Quemadmodum autem naturam cujuſque lineæ definiunt recentiores Geometræ per æquationem, exprimentem relationem ordinatarum ad abſciſſas correſpondentes; ſic *omnem linearum molem in certa genera diſtinguunt, ſecundum numerum dimenſionum, ad quas earum æquationes aſcendunt.*

Et Carteſius quidem genera linearum, non unica, ſed duabus dimenſionibus a ſe mutuo diſtinxit. Vocavit enim lineas primi generis, quarum æquationes quadratum, aut rectangulum duarum incognitarum non excedunt; vocavit lineas ſecundi generis, quarum natura æquationibus, ad tres, vel quatuor dimenſiones aſcendentibus, definitur; vocavit lineas tertii generis, quarum æquationes ad quinque, vel ſex dimenſiones aſſurgunt; atque ita deinceps.

Ut genera linearum hunc in modum a ſe mutuo diſtingueret, non aliud eum movit, quam quia, ſicuti æquationes quatuor dimenſionum, per regulam a Bombellio traditam, fa-

cili

Digitized by Google

cili negotio deprimuntur ad alias, quæ tres tantum continent dimenſiones; ſic etiam regula poſſit inveniri, per quam æquationes ſex dimenſionum ad alias quinque, æquationes octo dimenſionum ad alias ſeptem, atque ita porro, deprimi queant.

Interim regula iſta non adhuc Algebræ cultoribus innotuit. Et deinde, ſi eam reperite liceret, ut jam olim acutiſſime Fermatius adnotavit, nec etiam uſui nobis eſſe poſſet ad deprimendas æquationes, quæ duas incognitas comprehendunt; cujuſmodi ſunt illæ, per quas linearum natura definitur. Quare conſequens eſt, ut nullo quidem ſolido fundamento Carteſius genera linearum duabus dimenſionibus a ſe mutuo diſtinxerit.

VI. *Qua ratione linearum ordines diſtingui debeant, aperitur.*

VI. Rectius igitur alii *diſtinguant linearum ordines a ſe invicem unica tantum dimenſione*. Quem in finem vocant lineas primi ordinis, quæ æquationibus ſimplicibus, ac unius dimenſionis definiuntur; vocant lineas ſecundi ordinis, quarum æquationes ad duas dimenſiones aſcendunt; vocant lineas tertii ordinis, quarum æquationes ad tres dimenſiones aſſurgunt; atque ita deinceps.

Patet autem hac ratione, dicendas eſſe lineas ordinis infiniteſimi, quæ æquationibus, ad infinitas dimenſiones aſcendentibus, definiuntur. Et quoniam hujuſmodi ſunt lineæ illæ, quas Carteſius mechanicas appellavit; liquet, ordinem harum linearum omnes alios ſub ſe comprehendere, nec ideo a Geometria exulem eſſe debere, quemadmodum Carteſius judicavit.

Jam in lineis ordinis primi nulla curva, ſed ſola recta continetur. Unde, ſi curvarum genera ſint diſtinguenda, erunt curvæ primi generis, quarum æquationes quadratum, vel rectangulum duarum incognitarum non excedunt; erunt curvæ ſecundi generis, quæ æquationibus definiuntur trium dimenſionum; erunt curvæ tertii generis, quarum æquationes ad quatuor dimenſiones aſcendunt; atque ita deinceps.

Eadem linearum diſtinctio repeti quoque poteſt a numero punctorum, in quibus a recta ſecari poſſunt. Nam generaliter æquatio cujuſque lineæ ad tot dimenſiones aſcendit, quot ſunt puncta, in quibus recta eam ſecare poteſt. Et ideo erit linea ordinis primi, quam recta ſecat in unico puncto; linea ordinis ſecundi, cui recta occurrit in duobus punctis; linea ordinis tertii, quæ in tribus punctis a recta ſecari poteſt; atque ita de aliis.

VII. *Quomodo loca geometrica, lineis terminata, in certa genera ſunt diſtinguenda.*

VII. Linearum ordinibus conſtitutis, *facile modo erit, & ipſa loca geometrica, quæ lineis terminantur, in certa genera diſpeſcere.* Erunt enim loca primi generis, quæ lineas primi ordinis pro ſuis terminis habent; erunt loca ſecundi generis, quæ terminantur lineis ordinis ſecundi; erunt loca tertii generis, quæ agnoſcunt ut ſuos terminos lineas ordinis tertii; atque ita deinceps.

Quoniam autem ad primum ordinem linearum nulla curva, ſed ſola recta revocatur; perſpicuum eſt, loca primi generis, non aliis lineis, quam rectis terminari. Quumque ſecundum ordinem linearum conſtituant coni

ſe-

Digitized by Google

ſectiones, & præter eas nulla alia curva ad eum ordinem referatur; perſpicuum eſt quoque, loca ſecundi generis, non aliis lineis, quam coni ſectionibus, circumſcribi.

Inter ſectiones vero coni ponendus eſt etiam circulus; ut qui, ex ſuperius oſtenſis, velut ſpecies quædam ellipſis debet haberi. Unde locorum ſecundi generis alia erunt ad parabolam, alia ad ellipſim, alia ad circulum, & alia demum ad hyperbolam. Quumque hyperbola conſiderari poſſit, vel relate ad aliquam ejus diametrum, vel in ordine ad ſuas aſymptotos; duæ hinc locorum ad hyperbolam ſpecies communiter a Geometris diſtinguuntur.

VIII. *Oſtenditur, quod loca primi generis ſolis rectis terminentur. Primus caſus.*

VIII. Et quidem, *quod recta ſola conſtituat primum ordinem linearum, ſoliſque adeo rectis loca primi generis terminentur*, facile erit oſtendere. Æquatio enim, quæ duas incognitas continens, ad unam tantum dimenſionem aſcendit, poteſt eſſe quadruplicis formæ, vel ſcilicet $x = ay : c$, vel $x + b = ay : c$, vel $x - b = ay : c$, vel $b - x = ay : c$. Unde eo res redit, ut oſtendamus, unamquamque harum æquationum poſſe per rectam ſolam explicari.

Sit itaque primo $x = ay : c$. Ducatur recta quævis AB, per cujus portiones AN deſignentur valores incognitæ x. Capiatur in AB portio AD $= a$. Et conſtituto ad punctum D angulo quovis ADE, fiat DE $= c$. Jungantur deinde puncta A, & E per rectam AEX. Et actis rectis NM, ipſi DE parallelis, terminatiſque ad rectam AEX; dabunt iſtæ FIG. 71.

valores correſpondentes alterius incognitæ y.

Ponatur enim unaquæque portio AN $= x$, & quælibet rectarum NM $= y$. Jamque, ob triangula æquiangula ADE, ANM, erit, ut AD ad DE, ita AN ad NM. Quare, ſubſtituendo ſymbola harum rectarum, erit, ut a ad c, ita x ad y: & propterea, quum ſit $x = ay : c$; erit recta AEX linea, ad quam refertur æquatio $x = ay : c$.

Sed notetur hic velim, quod ſi recta AEX extendatur ad partem oppoſitam verſus Z, etiam per ipſam AZ explicari poſſit æquatio $x = ay : c$. Nam, etſi in iſto caſu ſit AN $= -x$, & NM $= -y$; adeoque reperiatur æquatio $-x = -ay : c$: translatis tamen terminis ad partes contrarias, rurſus habebitur ut antea $x = ay : c$.

IX. *Secundus caſus.* FIG. 72.

IX. Sit ſecundo $x + b = ay : c$. Deſignentur quoque per portiones AN rectæ alicujus AB valores incognitæ x. Et, ſumpta ad plagam oppoſitam portione AC $= b$, abſcindatur ex tota CB portio alia CD $= a$. Conſtituatur deinde ad punctum D angulus quivis CDE, & fiat DE $= c$. Jungantur poſtea puncta C, & E per rectam CEX. Et actis rectis NM, ipſi DE parallelis, terminatiſque ad rectam CEX, dabunt iſtæ valores correſpondentes alterius incognitæ y.

Ponatur enim unaquæque portio AN $= x$, & quælibet rectarum NM $= y$. Erit igitur quævis ipſarum CN $= x + b$. Quumque triangula CDE, CNM ſint æquiangula; erit, ut CD ad DE, ita CN ad NM. Quare, ſubrogatis ſymbolis harum rectarum, erit, ut

a ad

Digitized by Google

a ad c, ita $x + b$ ad y; adeoque, quum ſit $x + b = ay : c$; erit recta CEX linea, ad quam refertur æquatio $x + b = ay : c$.

Sed hic quoque notatu dignum exiſtimo, quod ducta per punctum A recta AF, ipſi DE parallela, explicari poſſit æquatio $x + b = ay : c$ non ſolum per rectæ CEX portionem FX, verum etiam per portionem alteram CF. Etſi enim in iſto caſu ſit AN $= -x$; manet tamen, tam NM $= y$, quam CN $= x + b$. Quare, ob triangula æquiangula CDE, CNM, ſemper erit $x + b = ay : c$.

Quin imo, ſi recta CEX extendatur ad partem oppoſitam verſus Z, etiam per ipſam CZ explicari poterit æquatio $x + b = ay : c$. Nam relate ad puncta ipſius CZ fiet AN $= -x$, NM $= -y$, & CN $= -x - b$. Unde æquatio erit $-x - b = -ay : c$: quæ tamen, translatis terminis ad partes oppoſitas, evadet rurſus ut antea $x + b = ay : c$.

X. Sit tertio $x - b = ay : c$. Referant adhuc portiones AN rectæ AB valores omnes incognitæ x. Capiatur ſuper ea, tam portio AC $= b$, quam portio CD $= a$. Tum, conſtituto ad punctum D angulo quovis CDE, fiat DE $= c$. Jungantur poſtea puncta C, & E per rectam CEX. Et ductis rectis NM, ipſi DE parallelis, terminatiſque ad rectam CEX, dabunt iſtæ valores correſpondentes alterius incognitæ y. X. *Tertius caſus.* FIG. 73.

Ponatur enim quævis portio AN $= x$, & quælibet rectarum NM $= y$. Erit igitur unaquæque ipſarum CN $= x - b$. Et quoniam triangula CDE, CNM ſunt æquiangu-

la; erit, ut CD ad DE, ita CN ad NM. Quare, ſubſtitutis ſymbolis harum rectarum, erit, ut a ad c, ita $x - b$ ad y: proindeque, quum ſit $x - b = ay : c$, erit recta CEX linea, ad quam refertur æquatio $x - b = ay : c$.

Nec ſilentio hoc loco præteribimus, quod, ſi per punctum A ducatur recta AF, ipſi DE parallela, quæ conveniat cum recta CEX, producta ad partem oppoſitam, in puncto F; æquatio $x - b = ay : c$ explicari poſſit etiam per portionem CF. Etſi enim in iſto caſu ſit NM $= - y$, quia tamen manet AN $= x$, fiet CN $= b - x$. Unde æquatio erit $b - x = - ay : c$: quæ, translatis terminis ad partes contrarias, evadet $x - b = ay : c$.

Quin imo, ſi ipſa CF extendatur ulterius verſus Z, eadem æquatio $x - b = ay : c$ explicari quoque poterit per portionem aliam indefinitam FZ. Nam relate ad puncta ipſius FZ, fiet AN $= - x$, NM $= - y$, & CN $= - x + b$. Unde æquatio erit $- x + b = - ay : c$: quæ, per translationem terminorum ad partes oppoſitas, evadet rurſus ut antea $x - b = ay : c$.

XI. *Quartus caſus.* FIG. 74. XI. Sit demum $b - x = ay : c$. Deſignentur pariter valores incognitæ x per portiones AN rectæ alicujus AB. Et, ſumpta ſuper AB portione AC $= b$, capiatur ad partem oppoſitam portio alia CD $= a$. Conſtituatur deinde ad punctum D angulus quivis CDE, & fiat DE $= c$. Jungantur poſtea puncta C, & E per rectam CEX. Et ductis rectis NM, ipſi DE parallelis, terminatiſque ad rectam CEX; dabunt iſtæ valores correſpon-

ſpondentes alterius incognitæ y.

Ponatur enim quælibet portio AN $=$ x, & quælibet rectarum NM $= y$. Erit igitur unaquæque ipſarum CN $= b - x$. Et quoniam triangula CDE, CNM ſunt æquiangula; erit, ut CD ad DE, ita CN ad NM. Quare, ſubſtituendo ſymbola harum rectarum, erit, ut a ad c, ita $b - x$ ad y: & propterea, quum ſit $b - x = ay : c$, erit recta CEX linea, ad quam refertur æquatio $b - x = ay:c$.

Hic etiam notare oportet, quod, ducta per punctum A recta AF, ipſi DE parallela, explicari poſſit æquatio $b - x = ay : c$, non ſolum per rectæ CEX portionem finitam CF, verum etiam per portionem aliam indefinitam FX. Etſi enim in iſto caſu ſit AN $= - x$, manet tamen, tam NM $= y$, quam CN $= b - x$; adeoque, ob triangula æquiangula CDE, CNM, ſemper erit $b - x = ay : c$.

Quin imo, ſi recta CEX extendatur ad partem oppoſitam verſus Z, etiam per ipſam CZ explicari poterit æquatio $b - x = ay : c$. Nam relate ad puncta ipſius CZ, etſi fiat NM $= - y$, quia tamen manet AN $= x$, erit CN $= x - b$. Unde æquatio erit $x - b = - ay : c$: quæ, per tranſpoſitionem terminorum ad partes oppoſitas, evadet rurſus ut antea $b - x = ay : c$.

XII. Atque hinc, aliud agentes, *jam methodum aperuimus, conſtruendi loca omnia, quæ ſunt ad lineam rectam*. Æquatio enim localis, quæ conſtrui debet, omnino neceſſe eſt, ut formam habeat alicujus ex quatuor præcedentibus æquationibus. Quare, ea comperta, ſatis

XII. *Quomodo loca primi generis per reductionem ad ſingulos caſus conſtruuntur.*

ſatis erit, illas inter ſe mutuo conferre, & mutua iſta comparatione determinare valores quantitatum, quibus locus definitur.

Ut, ſi in reſolutione alicujus problematis indeterminati inventa fuerit æquatio $gx + ff = fy$; diviſis terminis omnibus per g, fiet ea $x + ff : g = fy : g$; adeoque erit ejuſdem formæ cum ſecunda æquatione $x + b = ay : c$. Hinc, comparatis inter ſe mutuo terminis ipſarum,
FIG. 72. habebitur $b = ff : g$, & $a : c = f : g$: adeo nempe, ut aſſumpta $a = f$, fiet $c = g$. Unde conſtruetur locus quæſitus, capiendo AC $= ff : g$, CD $= f$, & DE $= g$.

Similiter, ſi æquatio, orta ex reſolutione alicujus problematis indeterminati, fuerit $ffx - ggm = ggy$; dividendo terminos omnes per ff, evadet ea $x - ggm : ff = ggy : ff$; adeoque erit ejuſdem formæ cum tertia æquatione $x - b = ay : c$. Unde, comparando terminos unius cum terminis alterius, habebitur $b = ggm : ff$, & $a : c = gg : ff$: adeo nempe, ut aſſumpta $a = gg : f$, fiet $c = f$. Quocirca conſtruetur locus quæſitus, capiendo AC $=$
FIG. 73. $ggm : ff$, CD $= gg : f$, & DE $= f$.

Atque ita quoque, ſi æquatio, nata ex reſolutione alicujus problematis indeterminati, fuerit $fg - mx = my$; diviſis terminis omnibus per m, fiet illa $fg : m - x = y$: proindeque erit ejuſdem formæ cum quarta æquatione $b - x = ay : c$. Quare, comparatis inter ſe mutuo terminis ipſarum, habebitur $b = fg : m$, & $a : c = 1$, ſive etiam $a = c$. Unde conſtruetur locus quæſitus, ſi poſita AC $=$
FIG. 74. $fg : m$, capiatur CD cujuſvis longitudinis, & fiat

Digitized by Google

ſiat DE ipſi CD æqualis.

XIII. Quoniam vero moleſtum eſt, omnium quatuor formularum conſtructiones memoria retinere; *poterit unica tantummodo formula totum negotium peragi*. Licebit autem hunc in finem eligere, vel formulam priorem, quæ eſt omnium ſimpliciſſima, vel aliquam trium poſteriorum, ad quas caſus compoſiti reducuntur.

XIII. *Quo pacto fieri poſſit eorum conſtructio, per reductionem ad caſum ſimplicem.*

Quum eligitur formula prior $x = ay : c$, in id maxime incumbendum, *ut ſubſtitutionis ope ad eam reducatur localis æquatio propoſita*. Nam, reductione iſta peracta, facile erit, quæſitum locum conſtruere. Ita, ſi localis æqualis ſit $fg + fx = gy$; diviſis terminis omnibus per f, erit $g + x = gy : f$. Et ponendo $g + x = z$, erit $z = gy : f$ æquatio reducta.

Referant modo portiones AN rectæ AB valores incognitæ x. Et quoniam habetur $g + x = z$, capiendo ad partem oppoſitam $AC = g$, deſignabunt portiones CN valores incognitæ z. Quare, ſi ex CB abſcindatur portio $CD = g$, & conſtituto angulo quovis CDE, ſiat $DE = f$; erit recta CEX locus quæſitus. FIG. 72.

Eadem ratione, ſi localis æquatio ſit $ffg - ffx = ggy$; dividendo terminos omnes per ff, erit $g - x = ggy : ff$; & ponendo $g - x = z$, erit $z = ggy : ff$ æquatio reducta. Hinc, ſiquidem ſuper AB capiatur $AC = g$, & deſignentur per portiones AN iſtius AC valores incognitæ x; fiet unaquæque reliquarum portionum $CN = g - x$; adeoque ipſæ CN deſignabunt valores incognitæ z. Unde, ſi ex FIG. 74.

CA,

CA, producta ſi opus, abſcindatur portio CD $= gg : f$, & conſtituto angulo quovis CDE, fiat DE $= f$; erit recta CEX locus optatus

XIV. *Quomodo eadem conſtructio peragenda, per reductionem ad caſum compoſitum.*

XIV. Quod ſi autem eligi velit aliqua trium poſteriorum formularum, veluti ſecunda $x + b = ay : c$, ſive etiam $x + b - ay : c = o$; *tunc oportebit, comparationis ope, definire quantitates, quæ locum determinant*. Et ſiquidem omnes inveniuntur poſitivæ; danda eſt rectis, quas referunt, illa eadem poſitio, quam in conſtructione formulæ reperiuntur habere. Sed, ſi earum aliqua prodit negativa; tunc recta, quam exhibet, capienda eſt ad plagam oppoſitam.

Jam quantitates, quæ locum determinant, ſunt *a*, *b*, *c*. Verum, inſtituta comparatione, dumtaxat ipbus *b* valor innoteſcit. Et quantum ad alias duas *a*, & *c*, nonniſi ratio, quam habent inter ſe, cognita fiet. Hinc valor unius ex iis ſumi poterit ad libitum. Et tunc per cognitam rationem, quam habent inter ſe, etiam valor alterius notus evadet. Præſtat autem, utcumque aſſumere valorem ipſius *c*, quem tamen poſitivum ſemper eſſe oportebit,

Sit igitur $x - g + ffy : gg = o$ æquatio localis conſtruenda. Inſtituta comparatione, habebitur $b = - g$, & $a : c = - ff : gg$. Quare, aſſumpta $c = g$, erit $a = - ff : g$. Quum ergo valores

FIG. 74. rectarum AC, CD comperti ſint negativi, ducendæ ſunt eæ ad plagas oppoſitas; proindeque quæſiti loci conſtructio peragenda erit, ut in quarta formula, ad quam propoſita æquatio proprie reducitur.

Sit

Digitized by Google

Sit etiam $x - my : n = o$ æquatio localis propoſita. Comparatione inſtituta, habebitur $b = o$, & $a : c = m : n$: proindeque, aſſumpta $c = n$, fiet $a = m$. Quum ergo valor rectæ AC compertus ſit nullus; evaneſcet ipſa AC, cadetque punctum C ſuper punctum A. Quare conſtructur quæſitus locus, ut in prima formula: nimirum, capiendo ſuper AB portionem AD $= m$, conſtituendo utcunque angulum ADE, faciendo DE $= n$, & conjungendo demum puncta A, & E per rectum AEX.

XV. Sed nolo hic ſilentio reticere, quod *locus ad lineam rectam exprimi quoque poſſit per æquationem, quæ unicam tantum incognitam contineat*. Jam enim generalis formula, nulla habita ſignorum, quibus termini afficiuntur, ratione, eſt $x + b - ay : c = o$. Profecto autem in hujuſmodi æquatione ratio, quam habet a ad c, quemadmodum poteſt eſſe æqualitatis, ita nihil etiam vetat, ut ſit vel infinite magna, vel infinite parva. XV. *Locorum ad lineam rectam caſus duo ſpeciales oſtenduntur.*

Sit itaque primo ratio illa infinite magna: adeo nempe, ut exiſtente c quantitate finita, ſit viciſſim infinita quantitas a. Quia igitur in hoc caſu punctum C abire debet in infinitum; fiet recta CEX parallela ipſi AB. Unde quælibet parallelarum NM æqualis erit rectæ DE: & propterea, iiſdem ut ſupra manentibus, loci æquatio erit $y = c$. FIG. 72. 75.

Sit ſecundo eadem illa ratio infinite parva, adeo nempe, ut exiſtente a quantitate finita, ſit per contrarium c quantitas infinita. Et quoniam in hoc alio caſu abire debet in infinitum punctum E, fiet recta CEX parallela ipſi DE. FIG. 72. 76.

Digitized by Google

ſi DE. Quare, ſicuti in recta CEX ſunt omnia puncta M, ita ſuper eadem CEX cadent parallelæ omnes MN. Hinc quælibet portionum AN æqualis fiet ipſi AC: proindeque loci æquatio erit $x = b$.

Nec ſilentio hic præteribimus, quod ubi ratio, quam habet *a* ad *c*, reperitur eſſe æqualitatis, tunc etiam portiones CN ipſis NM æquales fiant. Unde, ſi ſimpliciter quæſtio ſit de explicanda æquatione, valores incognitæ *y* exprimi poterunt, non modo per rectas NM, verum etiam per portiones ipſas CN, quæ ad punctum C omnes terminantur.

FIG. 72.

XIV. *Quomodo conſtruenda ſint loca ſecundi generis, coni ſectionibus terminata.*

XVI. Quemadmodum autem, conſtructione locorum ad lineam rectam, abunde nunc liquet, rectam ſolam conſtituere primum ordinem linearum, ſoliſque adeo rectis loca primi generis terminari; ita etiam, conſtruendo loca, quæ conicis ſectionibus terminantur, patebit, *ſolas coni ſectiones ſecundum linearum ordinem conſtituere, nec aliis, quam coni ſectionibus, ſecundi generis loca definiri*.

Conſtructionem horum locorum ſequentibus capitibus oſtendemus; & pro ea quoque eandem illam methodum uſurpabimus, qua mediante loca primi generis conſtruuntur. Nimirum formulam unicam eligemus, quæ ſit, vel omnium ſimpliciſſima, vel omnium maxime compoſita; & ope ejus formulæ cujuſcumque propoſitæ æquationis conſtructionem exhibebimus.

Sed hic quoque notare oportet, quod ubi eligitur formula omnium ſimpliciſſima; tunc præcipuum conſtructionis artificium in

Digitized by Google

eo ſitum ſit, ut ſubſtitutionis ope ad eam reducatur localis æquatio propoſita. Quotieſcumque vero adhibetur formula omnium maxime compoſita; tunc labor omnis eo ſe vertet, ut comparationis ope definiantur quantitates, quæ locum determinant.

CAP. III.

Qua ratione loca ad parabolam conſtrui poſſint, oſtenditur.

I. DIximus præcedenti capite, loca omnia conſtrui poſſe, adhibita formula, quæ caſum contineat, vel omnium ſimpliciſſimum, vel omnium maxime compoſitum. Jam in parabola caſus ſimpliciſſimus habetur, quum *ejus puncta omnia ad aliquam ipſius diametrum referuntur per rectas, quæ ſint diametri illius ordinatæ.* I. *Locorum ad parabolam formula ſimpliciſſima definitur.*

Sit igitur AB aliqua parabolæ diameter, ſitque etiam AD, tum parameter ejus diametri, cum recta, cui omnes ejuſdem diametri ordinatæ ſunt parallelæ. Capiatur in parabola punctum aliquod M, ex quo demittatur ad diametrum AB recta MN, ipſi AD parallela. Tum ponatur AN $= x$, MN $= y$, & AD $= p$. FIG. 77.

Et quoniam, ob parabolæ naturam, MN quadratum eſt æquale rectangulo DAN; erit ejuſdem parabolæ localis æquatio $yy = px$. Unde, ſemper ac æquatio aliqua ſubinde redu-

Digitized by Google

ci poſſit, ut ex una parte habeatur quadratum unius incognitæ, ex altera vero rectangulum ex incognita alia in datam quamvis quantitatem; tunc æquatio illa ad parabolam nos manuducet.

Sed notetur hoc loco velim, æquationem $yy = px$ haberi, non ſolum adhibitis ordinatis, quæ cadunt ad diametri partem unam, verum etiam, quum adhibentur ordinatæ illæ, quæ cadunt ad diametri partem oppoſitam. Nam, etſi in hoc caſu ſit $MN = -y$, quia tamen ejus quadratum eſt yy, erit ſemper $yy = px$ æquatio parabolæ localis.

II. *Quæ æquationes ad formulam illam ſimpliciſſimam ſunt reductibiles.*

II. Neque vero difficile erit definire, *qualis eſſe debeat æquatio, quæ ſubinde reduci poſſit, ut formam induat iſtius* $yy = px$. Primo enim, ſi in æquatione incognitæ duæ non reperiantur ſimul multiplicatæ, reducetur ad eam formam talis æquatio, quotieſcumque unius dumtaxat incognitæ quadratum in ea continetur.

Proponatur, exempli gratia, æquatio $yy + 2ay = cx - bb$. Fiat $y + a = z$. Et quoniam habetur $yy + 2ay = zz - aa$; ſubſtitutione peracta, erit $zz - aa = cx - bb$, ſive etiam $zz = cx + aa - bb$. Fiat quoque $x + (aa - bb) : c = u$, ita ut ſit $cx + aa - bb = cu$. Et habebitur demum $zz = cu$, quæ eſt ejuſdem formæ cum æquatione parabolæ $yy = px$.

Quod ſi autem in æquatione incognitæ duæ ſimul multiplicatæ reperiantur; tunc, ut illiuſmodi æquatio formam induat iſtius $yy = px$, oportebit, ut in ea utriuſque incognitæ quadratum contineatur, ſed ita tamen, ut tranſ-

Digitized by Google

translatis ad eandem æquationis partem, tum terminis, quadrata illa continentibus, cum termino incognitarum productum includente, iidem ſimul quadratum perfectum conſtituant.

Ita, ſi æquatio fuerit $yy - 2ay - 2xy + xx = cx + aa$; ponendo $y - a - x = z$, erit $yy - 2ay - 2xy + xx = zz - 2ax - aa$. Quare, ope ſubſtitutionis, fiet $zz - 2ax - aa = cx + aa$, ſive etiam $zz = cx + 2ax + 2aa$. Hinc, ponendo quoque $x + 2aa : (c + 2a) = u$, & $c + 2a = d$; erit $cx + 2ax + 2aa = du$; atque adeo, rurſus ope ſubſtitutionis, erit $zz = cu$.

III. Sed exemplis modo oſtendamus, *qua ratione, per reductionem æquationis ad formam ſimpliciſſimam, loca ad parabolam conſtruantur.* Primo itaque proponatur conſtruenda æquatio $yy + 2ay = cx$. Fiat $y + a = z$. Quumque habeatur $yy + 2ay = zz - aa$; erit $zz - aa = cx$, ſive etiam $zz = cx + aa$. Fiat quoque $x + aa : c = u$. Et quoniam habetur $cx + aa = cu$; erit $zz = cu$ æquatio reducta.

III. Oſtenditur exemplis conſtructio locorum ad parabolam per formulam ſimpliciſſimam. Exemplum primum.

FIG. 78.

Ducatur ergo in ſubjecto plano recta quævis AB, & per portiones ejus AN deſignentur valores incognitæ x. Quumque habeatur $x + aa : c = u$; capiendo ad partem oppoſitam AC $= aa : c$, fiet unaquæque CN $= x + aa : c$; adeoque deſignabunt portiones CN valores incognitæ u.

Sit porro CD recta, cui eſſe debent æquidiſtantes ipſæ NM, quæ referunt valores alterius incognitæ y. Et quoniam in reductione habetur $y + a = z$; capiatur ſuper ea ad plagam oppoſitam CE $= a$; & ducta per pun-

ctum E recta EF, ipſi CB parallela, fiet quælibet $EO = y + a$; adeoque deſignabunt portiones EO valores incognitæ z.

Denique, quum æquatio reducta ſit $zz = cu$, liquet, quæſitæ parabolæ diametrum debere eſſe rectam ipſam EF. Et quemadmodum ED eſt illa recta, cui parallelæ eſſe debent omnes ejus diametri ordinatæ; ſic perſpicuum eſt quoque, quod ſi ſuper eadem ED capiatur portio $EG = c$, debeat eſſe portio iſta EG parameter illius diametri.

IV. *Demonſtratio conſtructionis præcedentis exempli.* Fig. 78.

IV. Ut autem oſtendere poſſimus, *parabolam iſtam eſſe lineam, ad quam refertur æquatio $yy + 2ay = cx$*, juvat prius advertere, quod ea per punctum A neceſſario debeat tranſire. Compleatur ſiquidem parallelogrammum AE. Et quoniam, ex conſtructione, eſt AC, ſive $EH = aa : c$, & $EG = c$; erit rectangulum $GEH = aa$, & conſequenter æquale quadrato, quod ſit ex CE, ſive AH. Quare omnino neceſſe eſt, ut parabola tranſeat per punctum A.

Id quum ita ſit, capiatur primo in portione parabolæ AX punctum aliquod M, ex quo demittatur ad diametrum EF ordinata MO, quæ ipſi AB occurrat in N. Jamque, poſitis $AN = x$, & $MN = y$; erit ex conſtructione CN, ſive $EO = x + aa : c$, & $MO = y + a$. Sed, propter parabolam, MO quadratum eſt æquale rectangulo GEO. Quare erit $yy + 2ay + aa = cx + aa$, ſive etiam $yy + 2ay = cx$.

Capiatur ſecundo in portione parabolæ AE punctum quodvis M, ex quo etiam demittatur ad diametrum EF ordinata MO, quæ producatur ad partem oppoſitam, uſque donec

nec ipſi AC occurrat in N. Et quoniam in iſto caſu ſit AN $= -x$, & MN $= -y$; invenietur quoque CN, ſive EO $= x + aa:c$, & MO $= y + a$. Unde, ob parabolæ naturam, rurſus erit ut antea $yy + 2ay + aa = cx + aa$, ſive etiam $yy + 2ay = cx$.

Extendatur porro AH uſque in K, & capiatur in portione parabolæ AK punctum aliquod M, ex quo ſimiliter demittatur ad diametrum EF ordinata MO, quæ ipſi AC occurrat in N. Et, quamquam in hoc caſu habeatur quoque AN $= -x$, & MN $= -y$; attamen erit CN, ſive EO $= x + aa:c$, & MO $= -y - a$. Interim, quia quadratum ex $-y - a$ eſt $yy + 2ay + aa$; adhuc, per parabolæ naturam, habebitur ut prius $yy + 2ay = cx$.

Capiatur denique in portione parabolæ KZ punctum quodvis M, ex quo pariter demittatur ad diametrum EF ordinata MO, quæ ipſi AB occurrat in N. Quumque in iſto caſu fiat AN $= x$, & MN $= -y$; erit CN, ſive EO $= x + aa:c$, & MO $= -y - a$. Unde, propter parabolæ naturam, ſemper erit ut antea $yy + 2ay + aa = cx + aa$, ſive etiam $yy + 2ay = cx$.

V. Proponatur ſecundo *conſtruenda æquatio* $yy - 2ay = bb - cx$, *quæ ſimiliter ad parabolam nos manuducit.* Fiat $y - a = z$. Et quoniam habetur $yy - 2ay = zz - aa$; ſubſtitutione peracta, erit $zz - aa = bb - cx$, ſive etiam $zz = aa + bb - cx$. Ponatur quoque $(aa + bb):c - x = u$. Quumque habeatur $aa + bb - cx = cu$; erit rurſus ope ſubſtitutionis $zz = cu$ æquatio reducta. V. *Exemplum ſecundum, non longe diverſum a primo.*

FIG. 79. Ducatur itaque in ſubjecto plano recta quævis AB, ex qua abſcindatur portio AC $= (aa + bb):c$. Jamque, ſi deſignentur per portiones AN iſtius AC valores incognitæ x, fiet unaquæque reliquarum portionum CN $= (aa + bb):c - x$; adeoque ipſæ CN deſignabunt valores incognitæ u.

Sit deinde CD recta, cui eſſe debent æquidiſtantes ipſæ NM, quæ valores referunt alterius incognitæ y. Et quoniam in reductione habetur $y - a = z$, abſcindatur ex CD portio CE $= a$; & ducta per punctum E recta EF, ipſi CA parallela, fiet quælibet OM $= y - a$; atque adeo ipſæ OM valores referent incognitæ z.

Denique, quum æquatio reducta ſit $zz = cu$, liquet, quæſitæ parabolæ diametrum debere eſſe rectam EF. Et quemadmodum diametri ejus ordinatæ debent eſſe parallelæ ipſi ED, ſic perſpicuum eſt quoque, quod ſi ſuper eadem ED capiatur portio EG $= c$, debeat eſſe portio iſta EG parameter illius diametri.

Jam, quod per parabolam, ſubinde deſcriptam, fiat ſatis propoſitæ æquationi $yy - 2ay = bb - cx$, oſtendetur prorſus ut ſupra. Tantum notabimus, parabolam iſtam non poſſe tranſire per punctum A. Nam, completo parallelogrammo AE, invenietur rectangulum GEH majus quadrato, quod fit ex AH. Plane vero, ſi abeſſet ab æquatione terminus bb, tunc parabola per punctum A proculdubio tranſire deberet.

VI. *Exemplum tertium, ca-*

VI. Proponatur tertio *conſtruenda æquatio*

tio $yy + 2mxy:n + mmxx:nn = ax - bb$, *quæ* ſum paulo difficiliorem continens.
ob tres priores terminos , quadratum perfectum conſtituentes , adhuc ad parabolam nos ducit. Fiat $y + mx:n = z$. Quumq; habeatur $yy + 2mxy:n + mmxx:nn = zz$, erit $zz = ax - bb$. Capiatur quoque $x - bb:a = u$. Et quoniam habetur $ax - bb = au$, erit $zz = au$ æquatio reducta.

Ducatur jam in ſubjecto plano recta FIG. 80.
quævis AB , & per portiones ejus AN deſignentur valores incognitæ x . Quumque habeatur $x - bb:a = u$, abſcindatur ex ea portio $AC = bb:a$. Et quoniam fit unaquæque $CN = x - bb:a$, deſignabunt portiones CN valores incognitæ u.

Sit deinde CD recta , cui eſſe debent æquidiſtantes ipſæ NM , quæ valores referunt alterius incognitæ y. Et quoniam in reductione habetur $y + mx: n = z$, capiatur ſuper ea ad partem oppoſitam portio CE , quæ ſit ad AC, ut eſt m ad n . Jamque, ducta recta AEF, occurrente in O ipſis NM , fiet unaquæque $OM = y + mx:n$; adeoque ipſæ OM deſignabunt valores incognitæ z.

Quoniam autem rectæ OM correſpondent portionibus ipſius EF; utique debet eſſe EF diameter deſcribendæ parabolæ . Verum portiones illæ EO tunc demum reperiuntur æquales ipſis CN , ubi æquales ſunt duæ AE, AC. Unde procul eſt , ut eædem EO deſignare queant valores incognitæ u ; adeoque , etſi æquatio reducta ſit $zz = au$, multum tamen abeſt , ut ſit a parameter quæſitæ parabolæ.

Itaque , ut parametrum deſcribendæ pa-

rabolæ definiamus, ſit AC ad AE, ut eſt n ad s. Quumque hac ratione fiat quælibet $EO = su:n$; debebit quæſita parameter ejuſmodi eſſe, ut ducta in $su:n$ producat au. Quare, ſi ea vocetur p, erit $psu:n = au$, hoc eſt $ps:n = a$, ex quo infertur $p = an:s$.

Abſcindatur ergo ex ED portio $EG = an:s$. Et quemadmodum deſcribendæ parabolæ debet eſſe EF diameter, & ED recta, definiens poſitionem ſuarum ordinatarum; ita oportebit, ut abſciſſa illa portio EG ſit parameter ejus diametri. Nec difficile erit oſtendere, quod per hujuſmodi parabolam fiat ſatis propoſitæ æquationi.

VII. *Veritas conſtructionis præcedentis exempli demonſtratur.*

VII. Sit enim XEZ deſcripta parabola, quæ ipſi AB occurrat in H, & K. Capiatur primo in portione HK punctum quodvis M, ex quo demittatur ad diametrum EF ordinata MO, quæ ipſi AB occurrat in N. Jamq; poſitis $AN = x$, & $MN = y$; erit ex conſtructione

FIG. 80.

$CN = x - bb:a$, & $MO = y + mx:n$. Quumque CN ſit ad EO, ut eſt AC ad AE, ſive etiam, ut eſt n ad s; erit $EO = sx:n - sbb:nc$. Sed, propter parabolam, MO quadratum eſt æquale rectangulo GEO. Quare erit $yy + 2mxy:n + mmxx:nn = ax - bb$.

Capiatur ſecundo in portione EH, vel KX punctum quodvis M, ex quo etiam demittatur ad diametrum EF ordinata MO, quæ producatur ad partem oppoſitam, uſque donec ipſi AB occurrat in N. Et quoniam in iſto caſu ſit $AN = x$, & $MN = -y$; invenietur quoque $CN = x - bb:a$, & $MO = y + mx:n$. Quumque adhuc fiat $EO = sx:n - sbb:nc$;

ob

ob parabolæ naturam, rurſus erit ut antea $yy + 2mxy:n + mmxx:nn = ax - bb$.

Capiatur denique in portione parabolæ EZ punctum aliquod M, ex quo ſimiliter demittatur ad diametrum EF ordinata MO, quæ ipſi AB occurrat in N. Et quamquam in hoc caſu habeatur quoque $AN = x$, & $MN = -y$; attamen erit $EO = sx:n - sbb:na$, & $MO = -y - mx:n$. Interim, quia quadratum ex $-y - mx:n$ eſt $yy + 2mxy:n + mmxx:nn$; adhuc, per parabolæ naturam, erit ut prius $yy + 2mxy:n + mmxx:nn = ax - bb$.

Neque vero difficile erit, definire puncta duo H, & K, in quibus ipſi AB occurrit deſcripta parabola. Quum enim ſub iis punctis evaneſcere debeat valor incognitæ y; ſatis erit, ex ipſa æquatione delere terminos illos, in quibus incognita y reperitur. Et quoniam, deletis hujuſmodi terminis, æquatio evadit $mmxx:nn = ax - bb$; dabunt radices duæ hujus æquationis valores ipſarum AH, AK.

Fieri autem poteſt, ut puncta duo H, & K coeant in unum, & ipſa AB parabolæ tangens evadat: nimirum, quum habetur $a = 2bm:n$; quandoquidem in hoc caſu radices duæ æquationis $mmxx:nn = ax - bb$ fiunt æquales inter ſe. Sed contingere quoque poteſt, ut recta AB, nec ſecet, nec tangat parabolam: ſcilicet ſi a minor ſit, quam $2bm:n$; quum in iſto caſu ejuſdem æquationis radices duæ evadant imaginariæ.

VIII. Proponatur demum *conſtruenda æquatio* $yy - 2ay - 2xy + xx + ax = 0$, *quæ ſimiliter locum exhibet ad parabolam, ob tres termi-* VIII. *Exemplum quartum, caſum maxime compoſit.*

tuns exhibens. *minos* $yy - 2xy + xx$, *quadratum perfectum conſtituentes*. Fiat $y - a - x = z$. Quumque habeatur $yy - 2ay - 2xy + xx = zz - 2ax - aa$; erit $zz - 2ax - aa + ax = o$, ſive etiam $zz = ax + aa$. Capiatur quoque $x + a = u$, ita ut ſit $ax + aa = au$. Et erit $zz = au$ æquatio reducta.

In ſubjecto itaque plano ducatur recta quævis AB, per cujus portiones AN deſignentur valores incognitæ x. Et quoniam in reductione habetur $x + a = u$, capiatur ſuper ea ad plagam oppoſitam portio AC $= a$, Quumque fiat unaquæque CN $= x + a$, deſignabunt portiones iſtæ CN valores incognitæ u.

FIG. 81.

Sit deinde CD recta, cui eſſe debent æquidiſtantes ipſæ NM, quæ valores referunt alterius incognitæ y. Et quia in reductione habetur quoque $y - a - x = z$, abſcindatur ex CD portio CE $= a$, nec non, completo parallelogrammo AE, ducatur in eo diagonalis CF, quæ ipſis NM occurrat in O. Quumque habeatur quælibet OM $= y - a - x$; deſignabunt ipſæ OM valores incognitæ z.

Jam rectæ OM correſpondent portionibus ipſius CF. Quare CF debebit eſſe diameter deſcribendæ parabolæ. Et quoniam, poſito, quod CA ſit ad CF, ut n ad s invenitur quælibet CO $= su : n$; parametrum illius diametri talem eſſe oportebit, ut productum ejus per $su : n$ ſit au: proindeque erit $an : s$ ejuſmodi parameter.

Abſcindatur ergo ex CD portio CG $=$ $an : s$.

Digitized by Google

an: *s*. Et quemadmodum deſcribendæ parabolæ debet eſſe CF diameter, & CD recta, definiens poſitionem ſuarum ordinatarum; ita neceſſe erit, ut abſciſſa illa portio CG ſit parameter ejus diametri. Quod autem per hujuſmodi parabolam fiat ſatis propoſitæ æquationi $yy - 2ay - 2xy + xx + ax = 0$, oſtendetur prorſus ut ſupra.

Notatu interim hic dignum exiſtimo, quod ſicuti punctum C eſt vertex parabolæ, ſic eadem parabola tranſire quoque debeat per punctum A. Eſt enim CA ad CF, ut *n* ad *s*. Itaque erit CF $= as : n$: & propterea, quum ſit CG $= an : s$, erit rectangulum GCF $= aa$, & conſequenter æquale quadrato, quod fit ex AF. Quare omnino neceſſe eſt, ut parabola tranſeat per punctum A.

IX. Atque ita quidem conſtruuntur loca ad parabolam, per reductionem ſuarum æquationum ad formulam ſimpliciſſimam. Videamus itaque modo, *qua ratione eadem loca ad parabolam conſtrui debeant, reducendo eorum æquationes ad formulam, quæ ſit omnium maxime compoſita*. Quem in finem, qualis ſit iſtiuſmodi formula, operæ pretium eſt, ut primo loco definiamus.

IX. *Locorum ad parabolam formula generalis exhibetur.*

Nimirum, referendo parabolæ puncta omnia ad rectam poſitione datam, per rectas alias, quæ ſint diametri alicujus ordinatæ; perſpicuum eſt, tria contingere poſſe. Primo, ut recta poſitione data ſit ipſa illa diameter. Secundo, ut ſit aliqua ejus parallela. Et tertio demum, ut angulum cum eadem diametro conſtituat. Unde, ſicuti ex tribus hiſce

caſibus priores duo ſub tertio continentur; ita & formula parabolæ, omnium maxime compoſita, ea erit, quæ ex tertio illo caſu deducitur.

Sit igitur EF aliqua parabolæ diameter; FIG. 82. ſitque etiam EG recta, quæ exhibet, tum parametrum ejus diametri, cum poſitionem ſuarum ordinatarum. Agatur deinde AD, eidem diametro parallela; & per aliquod ejus punctum A ducatur quoque obliqua AB. Sumatur poſtea in AB punctum quodvis C; & ductis rectis AF, CD, ipſi EG parallelis, ponatur AC $= n$, CD $= m$, AD $= s$, EG $= p$, AF $= q$, & EF $= r$.

Capiatur nunc in parabola punctum aliquod M, ex quo demittatur ad diametrum EF ordinata MO, conveniens cum AB in N, & cum AD in R; ponaturque adhuc AN $= x$, & NM $= y$. Quia ergo AN eſt ad NR, ut AC ad CD; erit NR $= mx:n$; adeoque, quum duæ AF, RO inter ſe ſint æquales, erit MO $= y + mx:n + q$. Et quoniam AN eſt ad AR, ut AC ad AD; erit AR, ſive FO $= sx:n$; proindeque erit EO $= r + sx:n$.

Jam, propter parabolam, MO quadratum eſt æquale rectangulo GEO. Quare erit $yy + 2mxy:n + mmxx:nn + 2qy + 2qmx:n + qq = pr + psx:n$; ſive etiam $yy + 2mxy:n + mmxx:nn + 2qy + 2qmx:n - psx:n + qq - pr = 0$; & propterea formulam parabolæ, omnium maxime compoſitam, comperta æquatio nobis exhibebit.

Perſpicuum eſt autem, in hujuſmodi formula tres terminos $yy + 2mxy:n + mmxx:nn$

qua-

quadratum perfectum conſtituere; nec poſſe in ea deficere terminum $2mxy:n$, quin ſimul deficiat terminus alter $mmxx:nn$. Unde veritas regulæ, ſuperius traditæ, pro cognoſcendis locis ad parabolam, ex ipſa eorum formula generali prono alveo fluit.

X. Sed oſtendamus nunc, *quo pacto, ope inventæ formulæ generalis, loca ad parabolam conſtruantur*. Nimirum, comparationis ope, definiendæ ſunt primum quantitates, quæ locum determinant. Et ſiquidem omnes inveniuntur poſitivæ; danda eſt rectis, quas referunt, illa eadem poſitio, quam in figura formulæ reperiuntur habere. Sed, ſi earum aliqua prodit negativa; tunc recta, quam exhibet, capienda eſt ad plagam oppoſitam. X. *Quomodo per inventam formulam generalem loca ad parabolam conſtruantur.*

Quantitates porro, quæ locum determinant, ſunt m, n, p, q, r, s. Verum, inſtituta comparatione, dumtaxat ipſarum p, q, r valores innoteſcunt. Et, quantum ad priores duas m, & n, nonniſi ratio, quam habent inter ſe, cognita fiet. Hinc valor unius ex iis ſumi poterit ad libitum. Et tunc, per cognitam rationem, quam inter ſe habent, etiam valor alterius notus evadet. Præſtat autem, utcumque aſſumere valorem ipſius n, quem tamen poſitivum ſemper eſſe oportebit.

Determinatis valoribus ipſarum m, & n, etiam quantitatis s valor innoteſcet. In triangulo enim CAD notus eſt angulus ACD, velut æqualis angulo ANM, qui vel datus eſt, vel ſumitur ad libitum. Quare, ubi duo ejus latera AC, CD, deſignata per quantitates n, & m, ſimiliter nota ſunt; cognoſcemus quoque FIG. 82.

ter-

tertium latus AD, quod exhibet quantitas s. Speciatim autem erit $s = n$, ubi valor ipſius m nullus reperitur; quandoquidem, evaneſcente CD, cadit AB ſuper AD, & puncta duo C, & D coeunt in unum.

Illud quoque ſedulo hic notandum exiſtimo, quod ubi valor parametri p prodit negativus, tunc ipſa parabola volvenda ſit concavitate ſua ad plagam oppoſitam. Nec obſcura eſt hujus rei ratio. Nam negatio illa, non tam afficit parametrum, quam abſciſſam, in quam parameter multiplicata reperitur. Unde, quum abſciſſa capienda ſit ad partem contrariam; omnino neceſſe eſt, ut parabola ſua concavitate reſpiciat plagam oppoſitam.

XI. *Exemplum primum, caſum exhibens ſimpliciorem.*

XI. Oporteat itaque primo, *conſtruere æquationem* $yy - 2ay + cx = 0$, *quæ locum exhibet ad parabolam*. Quia in ea deeſt terminus xy; utique fractio $2m:n$, per quam ille in formula multiplicatus reperitur, debet eſſe nihilo æqualis. Unde, quum ſit $m = 0$; per ea, quæ paulo ante notata ſunt, erit quoque $n = s$; adeoque ipſa formula fiet $yy + 2qy - px + qq - pr = 0$.

Jam, inſtituta comparatione, habebitur $2q = - 2a$, $p = - c$, & $qq - pr = 0$. Quare, per reductionem, ut eſt $p = - c$, ſic erit $q = - a$, & $r = qq:p = - aa:c$: proindeque, deſignatis valoribus incognitæ x per

FIG. 83. portiones AN rectæ AB, & exiſtente AH recta, cui eſſe debent æquidiſtantes valores alterius incognitæ y, conſtruetur propoſita æquatio in eum, qui ſequitur, modum.

Abſcindatur ex AH portio AF $= a$.

Tum,

Digitized by Google

Tum, ducta FO, ipſi AB parallela, capiatur ſuper ea portio FE $= aa:c$. Agatur poſtea EG parallela rectæ AH, & fiat eadem EG$=c$. Denique circa diametrum EF deſcribatur parabola, ita ut EG exhibeat, tam parametrum ejus diametri, quam poſitionem ſuarum ordinatarum. Et parabola,ſubinde deſcripta, locus erit quæſitus.

Ducatur enim ex puncto aliquo M ordinata ad diametrum MO, quæ extendatur uſque donec ipſi AB occurrat in N. Et, poſitis AN, ſive FO $= x$, & MN $= y$; erit ex conſtructione EO $= aa:c - x$, & MO $= y - a$. Sed, propter parabolam, MO quadratum eſt æquale rectangulo GEO. Quare erit $yy - 2ay + aa = aa - cx$, ſive etiam $yy - 2ay + cx = o$, quæ eſt æquatio conſtruenda.

XII. Oporteat etiam, *conſtruere æquationem* $yy - 2axy:c + aaxx:cc + 2ay - cx = 0$, *quæ ſimiliter locum exhibet ad parabolam.* Quia hic adeſt terminus xy; inſtituta comparatione, habebitur primo $2m:n = -2a:c$. Quare, aſſumpta $n = c$, fiet $2m = -2a$, ſive etiam $m = -a$. Comparatis autem terminis reliquis, habebitur quoque $2q = 2a$, $2qm:n - ps:n = -c$, & $qq - pr = o$.

XII. Exemplum ſecundum, caſum maxime compoſitum continens.

Hinc,per reductionem,erit primo $q = a$. Et,ſubrogatis in æquatione $2qm:n - ps:n = -c$ valoribus ipſarum m, n, q, erit ſecundo $p = (cc - 2aa):s$. Unde fiet tertio $r = qq:p = aas:(cc - 2aa)$. Et quoniam relate ad quantitatem $cc - 2aa$ tria contingere poſſunt; ponamus, cc majorem eſſe quam $2aa$: qua ratione, ut poſitiva eſt quantitas $cc - 2aa$, ſic

va-

Digitized by Google

valores ipſarum p, & r erunt pariter poſitivi.

FIG. 84. Sit jam AB recta, per cujus portiones AN deſignantur valores incognitæ x; & ea, cui æquidiſtantes eſſe debent valores alterius incognitæ y, ſit AH. Capiatur in AB portio AC $= c$; & ducta CD, ipſi AH parallela, fiat eadem CD $= a$, jungaturque AD. Extendatur deinde AH verſus A. Et, conſtituta AF $= a$, ducatur per punctum F recta EO, parallela ipſi AD. Fiat poſtea FE $= aas : (cc - 2aa)$, & ponatur parameter deſcribendæ parabolæ EG $= (cc - 2aa) : s$.

His peractis, deſcribatur parabola circa diametrum EF, ita ut recta EG deſignet, tam parametrum ejus diametri, quam poſitionem ſuarum ordinatarum. Et facile erit oſtendere, quod per eam fiat ſatis propoſitæ æquationi. Nam, ducta ex aliquo ejus puncto M ordinata ad diametrum MO, quæ occurrat ipſis AB, AD in N, & R, poſitiſque AN $= x$, & NM $= y$; erit, ob triangula æquiangula ACD, ANR, NR $= ax : c$, & AR, ſive FO $= sx : c$.

Hinc, quum ſit MR $= y - ax:c$, & AF, ſive RO $= a$, erit tota MO $= y - ax : c + a$. Eſt autem ex conſtructione FE $= aas : (cc - 2aa)$. Quare erit tota EO $= sx:c + aas : (cc - 2aa)$: & propterea, quum propter parabolam MO quadratum ſit æquale rectangulo GEO, fiet æquatio $yy - 2axy:c + aaxx:cc + 2ay - 2aax:c + aa = cx - 2aax:c + aa$, quæ reducta exhibebit æquationem propoſitam $yy - 2axy : c + aaxx:cc + 2ay - cx = 0$.

XIII. *Praecedentis exempli ...*

XIII. Nolo autem hoc loco reticere, quod quem-

quemadmodum valores quantitatum p, & r *ſus quidem*
inveniuntur poſitivi, quotieſcumque cc ma- *ſpecialis ex-*
jor eſt, quam $2aa$; ita iidem valores prodant *penditur.* FIG. 84.
negativi, ubi per contrarium cc minor eſt, quam $2aa$. Id vero quum contingit, non aliud fieri debet, quam ſumere FE ad partem contrariam, ipſamque parabolam ſubinde deſcribere, ut concavitate ſua reſpiciat quoque plagam oppoſitam.

Sed fieri quoque poteſt, ut ſit $cc = 2aa$. Quumque in hoc caſu quantitas $cc - 2aa$ fiat nihilo æqualis, evaneſcet quoque valor parametri p; ipſa autem r infinita reperietur. Id vero mirum cenſeri non debet. Nam, ubi habetur $cc = 2aa$, duo parabolæ crura vertuntur in binas rectas, diametro EF parallelas; quarum una eſt ipſa AD, tranſiens per punctum A; altera in eadem a diametro diſtantia jacet ad partem oppoſitam.

Nec ſane difficile erit, veritatem hujus oſtendere. Quotieſcumque enim habetur $cc = 2aa$, erit $c = 2aa : c$; adeoque æquatio conſtruenda $yy - 2axy : c + aaxx : cc + 2ay - cx = o$ vertetur in hanc aliam $yy - 2axy : c + aaxx : cc + 2ay - 2aax : c = o$. Hinc, addendo utrique æquationis parti eandem quantitatem aa, erit $yy - 2axy : c + aaxx : cc + 2ay - 2aax : c + aa = aa$. Et, extrahendo hinc inde radicem quadratam, erit $y - ax : c + a = a$, ſive $y = ax : c$.

Huic autem æquationi fieri ſatis per rectam AD, perſpicuum quidem eſt. Nam, quum ſit, ut AC ad CD, ita AN ad NR; erit NR $= ax : c$: proindeque, poſita eadem NR $= y$,

 fiet

Digitized by Google

fiet æquatio $y = ax:c$. Quoniam vero, per extractionem quadratæ radicis ex utraque parte æquationis $yy - 2axy:c + aaxx:cc + 2ay - 2aax:c + aa = aa$, habetur quoque $-y + ax:c - a = a$, ſive $-y = 2a - ax:c$; hinc eſt, ut locus componendus, præter rectam AD, aliam exigat ei parallelam ad partem alteram ipſius EF.

XIV. *Quid potiſſimum in compoſitione locorum ad parabolam debeat verti.*

XIV. Cæterum, *in compoſitione locorum ad parabolam illud ſedulo notari debet*, quod exiſtentibus x, & y duabus conſtruendæ æquationis incognitis, fieri quandoque poſſit, ut deſignari debeant per portiones AN rectæ AB valores incognitæ y, perque rectas NM valores alterius incognitæ x. Nec ſane in utraque loca conſtruendi ratione difficile erit definire, quando demum id fieri debeat.

Nimirum, quum conſtruitur locus, per reductionem æquationis ad formulam ſimpliciſſimam, fieri id debet, quotieſcumque in æquatione reducta per parametrum multiplicata reperitur, vel incognita y, vel quæ ex ipſa dependet. Sic æquatio $xx - 2ax = cy$ mutationem illam expoſcit. Nam, faciendo $x - a = z$, & $y + aa:c = u$, habetur loco ejus hæc alia $zz = cu$: ubi incognita u, quæ reperitur per parametrum multiplicata, dependet ex y; quum ſit $y + aa:c = u$.

Quotieſcumque vero conſtruitur locus, per reductionem æquationis ad formulam compoſitam, illud idem fieri debet, quando in æquatione conſtruenda quadratum incognitæ x ab omni fractione immune reperitur. Sic ſequens æquatio $xx - 2axy:c + aayy:cc$

— 2ax

$-2ax-2by+cc=o$ exigit quoque eam variationem; quia quadratum incognitæ x illud eſt, quod in ea omni fractione denudatum occurrit.

Patet autem, dari poſſe loca quædam, quæ utroque modo conſtrui queant. Hujuſmodi eſt ſequens æquatio $xx-2xy+yy-2ax=o$. Nam primo in ea utriuſque incognitæ quadratum omni vacat fractione. Et deinde, ſi fiat $y-x=z$, habebitur loco ejus hæc alia $zz=2ax$; ſi vero ponatur $x-y-a=z$, & $y+a:2=u$, fiet $zz=2au$ æquatio reducta.

Illud quoque perſpicuum eſt, quod ubi æquatio conſtruitur, per reductionem ad formulam compoſitam, eademque natura ſua mutationem illam expoſcit, debeant etiam in formula incognitæ variari. Sic formula, cum qua comparanda eſt æquatio $xx-2axy:c+aayy:cc-2ax-2by+cc=o$, haud quidem eſſe debet $yy+2mxy:n+mmxx:nn+2qy+2qmx:n-psx:n+qq-pr=o$, ſed $xx+2myx:n+mmyy:nn+2qx+2qmy:n-psy:n+qq-pr=o$.

CAP. IV.

Ratio conſtruendi loca ad ellipſim, & circulum aperitur.

I. Oſtenſo, qua ratione loca ad parabolam conſtruuntur; ſequitur nunc, I. *Locorum ad*

ellipſim formula ſimplicíſſima definitur. nunc, ut eorum, quæ ſunt ad ellipſim, conſtructionem aggrediamur. Cum iis autem conjungemus quoque loca, quæ circuli circumferentia terminantur; quia, ut ſæpius dictum eſt, circulus velut ſpecies quædam ellipſis debet haberi.

Primo igitur oſtendemus, quo pacto loca ad ellipſim conſtruantur, adhibita formula, quæ caſum continet, omnium ſimpliciſſimum. Et in ellipſi quoque, non ſecus ac in parabola, caſus ſimpliciſſimus habetur, quum *ejus puncta omnia ad aliquam ipſius diametrum referuntur per rectas, quæ ſint diametri illius ordinatæ*.

FIG. 85. Sit ergo A centrum ellipſis, & BC aliqua ipſius diameter. Sit etiam BD, tum parameter ejus diametri, cum recta, cui omnes ejuſdem diametri ordinatæ ſunt parallelæ. Capiatur in ellipſi punctum aliquod M, ex quo demittatur ad diametrum BC recta MN, ipſi BD parallela. Tum ponatur AN $= x$, MN $= y$, & AB, vel AC $= d$.

Jam, ob naturam ellipſis, MN quadratum eſt ad differentiam quadratorum AB, AN, ut eſt BD ad BC. Quare, ſi ponamus BD eſſe ad BC, ut eſt n ad m; erit, ut n ad m, ita yy ad $dd - xx$; proindeque ellipſis localis æquatio erit $myy : n = dd - xx$. Unde ſemper ac æquatio aliqua ad iſtiuſmodi formam reduci poterit, tunc illa ad ellipſim proculdubio nos manuducet.

Sed notetur hoc loco velim, quod etſi ordinata MN cadat infra centrum A, adhuc tamen æquatio localis ellipſis ſit $myy : n = dd - xx$.

Digitized by Google

$-xx$. Nam, licet in hoc caſu habeatur $AN = -x$; nihilominus ejus quadratum eſt ſemper xx. Et ob eandem rationem eadem adhuc erit ellipſis æquatio localis, ubi ordinata ducitur ad diametri partem oppoſitam; quia, etſi fiat $MN = -y$, quadratum tamen ex MN ſemper erit yy.

II. Neque vero difficile erit definire, *qualis eſſe debeat æquatio, quæ ſubinde reduci poſſit, ut formam induat iſtius* $myy:n = dd - xx$. Primo enim, ſi in æquatione incognitæ duæ non reperiuntur ſimul multiplicatæ, reducetur ad eam formam talis æquatio, ſi ab utraque ejus parte exiſtant quadrata incognitarum, contrariis ſignis affecta. II. *Quæ æquationes ad formulam illam ſimpliciſſimam ſunt reducibiles.*

Proponatur, exempli gratia, æquatio $ayy:c - 2ay = 2bx - xx$. Fiat $b - x = u$. Et quoniam habetur $2bx - xx = bb - uu$; ſubſtitutione peracta, erit $ayy:c - 2ay = bb - uu$, ſive etiam $yy - 2cy = bbc:a - cuu:a$. Fiat quoque $y - c = z$. Quumque habeatur $yy - 2cy = zz - cc$; erit rurſus per ſubſtitutionem $zz - cc = bbc:a - cuu:a$, ſive etiam $azz:c = ac + bb - uu$. Ponatur porro $ac + bb = ff$. Et habebitur demum $azz:c = ff - uu$, quæ eſt ejuſdem formæ cum æquatione ellipſis $myy:n = dd - xx$.

Quod ſi autem in æquatione incognitæ duæ ſimul multiplicatæ reperiantur; tunc, ut illiuſmodi æquatio formam induat iſtius $myy:n = dd - xx$, oportebit, utriuſque incognitæ quadratum ita quidem in ea contineri, ut translatis ad eandem æquationis partem, tum terminis, quadrata illa continentibus, cum

termino, incognitarum productum includente, debeat coefficiens unius quadrati minui nonnihil, quo termini ii poſſint ſimul quadratum perfectum conſtituere.

Ita ſi æquatio fuerit $yy - 2ay + 2axy:c + 2aaxx:cc + 2bx = 0$; ponendo $y - a + ax:c = z$, erit $yy - 2ay + 2axy:c + aaxx:cc = zz + 2aax:c - aa$. Quare, ope ſubſtitutionis, fiet $zz + 2aax:c - aa + aaxx:cc + 2bx = 0$, ſive etiam $cczz:aa + 2cx - cc + xx + 2bccx:aa$. Hinc, ponendo quoque $x + c + bcc:aa = u$, ita ut ſit $xx + 2cx + 2bccx:aa = uu - cc - 2bc^3:aa - bbc^4:a^4$; erit rurſus per ſubſtitutionem $cczz:aa + uu - 2cc - 2bc^3:aa - bbcc^4:a^4 = 0$. Et faciendo adhuc $2cc + 2bc^3:aa + bbc^4:a^4 = ff$; erit demum $cczz:aa + uu - ff = 0$, ſive etiam $cczz:aa = ff - uu$.

III. *Oſtenditur exemplis conſtructio locorum ad ellipſim per formulam ſimpliciſſimam. Exemplum primum.*

III. Sed exemplis modo oſtendamus, *qua ratione, per reductionem æquationis ad formulam ſimpliciſſimam, loca ad ellipſim conſtruantur*. Primo itaque proponatur conſtruenda æquatio $ayy:c - 2ay = 2bx - xx$, quæ, ut paulo ante oſtenſum eſt, reducitur ad $azz:c = ff - uu$, ponendo $b - x = u$, $y - c = z$, & $ac + bb = ff$.

FIG. 86.

Ducatur in ſubjecto plano recta quævis AB, ex qua abſcindatur portio AC $= b$. Jamque, ſi deſignentur per portiones AN iſtius AC valores incognitæ x, fiet unaquæque reliquarum portionum CN $= b - x$; adeoque, quum habeatur $b - x = u$, ipſæ CN deſignabunt valores incognitæ u.

Sit deinde CD recta, cui eſſe debent æqui-

quidiſtantes ipſæ NM, quæ valores referunt alterius incognitæ y. Et quoniam in reductione habetur $y - c = z$, abſcindatur ex CD portio CE $= c$; & ducta per punctum E recta EF, ipſi CA parallela, fiet quælibet OM $= y - a$; atque adeo ipſæ OM valores referent incognitæ z.

Denique, quum æquatio reducta ſit $azz : c = ff - uu$, liquet, quod, ſi hinc inde a puncto E capiatur, tum EF, cum EG $= f$, debeat eſſe FG quæſitæ ellipſis diameter. Et quemadmodum, ducta FH, ipſi CD parallela, diametri ejus ordinatæ debent eſſe æquidiſtantes rectæ FH; ita, ſi fiat, ut FH ſit ad FG, veluti eſt c ad a, erit eadem FH parameter illius diametri.

IV. Ut autem oſtendere poſſimus, *ellipſim iſtam eſſe lineam, ad quam refertur æquatio* $ayy : c - 2ay + 2bx - xx$, juvat prius advertere, quod ſi fiat AB dupla ipſius AC, ea neceſſario tranſire debeat per puncta duo A, & B. Nam in æquatione, de qua agitur, ſi ponatur $y = 0$, habebitur $2bx - xx = 0$, unde infertur, tum $x = 0$, cum $x = 2b$.

IV. *Demonſtratio conſtructionis præcedentis exempli in medium affertur.* FIG. 86.

Id quum ita ſit, agantur rectæ AK, BL ipſi FH parallelæ, & capiatur primo in portione ellipſis KL punctum aliquod M, ex quo demittatur ad diametrum EF ordinata MO, quæ ipſi AB occurrat in N. Jamque, poſitis AN $= x$, & MN $= y$; erit ex conſtructione CN, ſive EO, vel $b - x$, vel $x - b$, & MO $= y - c$. Sed, propter ellipſim, MO quadratum eſt ad differentiam quadratorum EF, EO, ut eſt FH ad FG. Quare erit, ut $yy - 2cy +$

 cc ad

cc ad $ff - bb + 2bx - xx$, ita c ad a : proindeque erit $ayy : c - 2ay + ac = ff - bb + 2bx - xx$; ſive etiam $ayy : c - 2ay = 2bx - xx$, ſi loco ff valor ipſius $ac + bb$ reponatur.

Capiatur ſecundo in portione ellipſis BGL punctum aliquod M, ex quo etiam demittatur ad diametrum FG ordinata MO, ipſi AB occurrens in N. Et quamquam in iſto caſu maneat adhuc AN $= x$, & MN $= y$; tamen erit ſemper CN, ſive EO $= x - b$, & MO eſſe poterit, vel $y - c$, vel $c - y$. Interim, quia quadratum, ſive fiat ex $y - c$, ſive ex $c - y$, eſt ſemper $yy - 2ay + cc$; rurſus, ob ellipſis naturam, erit ut antea $ayy : c - 2ay = 2bx - xx$.

Capiatur tertio in portione ellipſis AFK punctum quodvis M, ex quo ducatur ad diametrum FG ordinata MO, ipſi AB occurrens in N. Patetque in hoc caſu, manere quidem MN $= y$, ſed fieri AN $= - x$. Hinc erit ſemper CN, ſive EO $= b - x$, & MO eſſe poterit, ut in caſu præcedenti, vel $y - c$, vel $c - y$. Quare, ob ellipſis naturam, habebitur ſemper æquatio $ayy : c - 2ay + ac = ff - bb + 2bx - xx$, quæ reducta fiet $ayy : c - 2ay = 2bx - xx$.

Capiatur demum in portione ellipſis AB punctum quodvis M, ex quo pariter demittatur ad diametrum FG ordinata MO, ipſi AB occurrens in N. Quamque in iſto caſu fiat AN $= x$, & MN $= - y$, erit CN, ſive EO, vel $b - x$, vel $x - b$, & MO erit ſemper $- y + c$. Unde, propter naturam ellipſis, adhuc habebitur æquatio $ayy : c - 2ay = 2bx - xx$.

V. Pro-

V. Proponatur ſecundo *conſtruenda æquatio altera, ſuperius allata*, $yy - 2ay + 2axy:c + 2aaxx:cc + 2bx = 0$, quæ, ut ibidem oſtenſum eſt, reducitur ad $cczz:aa = ff - uu$, ponendo $y - a + ax:c = z$, $x + c + bcc:aa = u$, & $2cc + 2bc^3:aa + bbc^4:a^4 = ff$.

V. *Exemplum ſecundum, caſum exhibens paulo difficiliorem.*

Ducatur in ſubjecto plano recta quævis AB, & per portiones ejus AN deſignentur valores incognitæ x. Quumque habeatur $x + c + bcc:aa = u$, capiatur ad partem oppoſitam portio AC $= c + bcc:aa$. Et quoniam fit quælibet CN $= x + c + bcc:aa$, deſignabunt portiones CN valores incognitæ u. FIG. 87.

Sit deinde CD recta, cui eſſe debent æquidiſtantes ipſæ NM, quæ valores referunt alterius incognitæ y. Et quoniam in reductione habetur $y - a + ax:c = z$, abſcindatur ex CD tum portio CE $= a$, cum portio EF, quæ ſit ad AC, ut eſt a ad c. Jamque completo parallelogrammo AE, ductaque FG, ipſis NM occurrente in O, fiet unaquæque OM $= y - a + ax:c$; adeoque ipſæ OM valores referent incognitæ z.

Quoniam autem rectæ OM correſpondent portionibus ipſius FG; utique debet eſſe F centrum deſcribendæ ellipſis, & FG poſitio ſuæ diametri. Verum portiones illæ FO tunc demum reperiuntur æquales ipſis CN, ubi æquales ſunt duæ AC, FG. Unde procul eſt, ut eædem FO deſignare queant valores incognitæ u; adeoque, etſi æquatio reducta ſit $cczz:a = ff - uu$, multum tamen abeſt, ut ſit f ſemidiameter quæſitæ ellipſis, & ut ratio parametri ad diametrum ſit æqualis ei, quam habet aa ad cc.

Quia

Itaque, ut definiamus, tum ſemidiametrum deſcribendæ ellipſis, cum rationem parametri ad diametrum; ſit AC ad FG, ut eſt c ad s. Quumque hac ratione fiat quælibet FO $= su : c$; ſi ponamus ulterius, quod quæſita ſemidiameter ſit g, & quod ratio parametri ad diametrum ſit æqualis ei, quam habet n ad m; erit ejuſdem ellipſis localis æquatio $mzz : n = gg - ssuu : cc$, ſive etiam $ccmzz : ssn = ccgg : ss - uu$. Erat autem $cczz : aa = ff - uu$. Quare, inſtituta comparatione, fiet $ccm : ssn = cc : aa$, & $ccgg : ss = ff$. Unde infertur $n : m = aa : ss$, & $g = fs : c$.

Capiatur ergo ſuper FG hinc inde à puncto F, tùm FH, cum FK $= fs : c$; & erit HK diameter quæſitæ ellipſis. Ducatur porro per punctum H recta HL, ipſi CD parallela; & fient diametri ejus ordinatæ æquidiſtantes rectæ HL. Conſtituatur demum HL talis longitudinis, ut ſit HL ad HK, veluti eſt aa ad ss; & erit eadem HL parameter illius diametri.

VI. *Veritas conſtructionis præcedentis exempli demonſtratur.*

VI. Hic etiam, ut oſtendere poſſimus, *hujuſmodi ellipſim ſatisfacere propoſitæ æquationi* $yy - 2ay + 2axy : c + 2aaxx : cc + 2bx = 0$, juvat prius advertere, quod ſi ſuper

FIG. 87. AC capiatur portio AP $= bcc : aa$, ea neceſſario tranſire debent per puncta duo A, & P. Nam in æquatione, da qua agitur, ſi ponatur $y = 0$, fiet $2aaxx : cc + 2bx = 0$, ſive etiam $aaxx : cc + bx = 0$, unde infertur, tum $x = 0$, cum $x = - bcc : aa$.

Id, quum ita ſit, agantur rectæ AQ, PS ipſi CD, vel HL parallelæ. Et capiatur primo

mo in portione ellipſis AKQ punctum aliquod M, ex quo demittatur ad diametrum HK ordinata MO, ipſi AB occurrens in N. Jamque, poſitis AN $= x$, & MN $= y$; erit ex conſtructione CN $= x + c + bcc : aa$, & MO vel $y - a + ax : c$, vel $- y + a - ax : c$. Sed CN eſt ad FO, ut AC ad FG, ſive etiam, ut c ad s. Quare erit FO $= sx : c + s + bsc : aa$.

Quia autem, propter ellipſim, MO quadratum eſt ad differentiam quadratorum FH, FO, veluti eſt HL ad HK; erit, ut $yy - 2ay + aa + 2axy : c - 2aax : c + aaxx : cc$ ad $ffss : cc - ssxx : cc - 2ssx : c - ss - 2bssx : aa - 2bssc : aa - bbsscc : a^4$, ita aa ad ss. Unde fiet $yy - 2ay + aa + 2axy : c - 2aax : c + aaxx : cc = aaff : cc - aaxx : cc - 2aax : c - aa - 2bx - 2bc - bbcc : aa$, quæ, translatis terminis omnibus ad eandem partem, & poſito loco ff valore ejus $2cc + 2bc^3 : aa + bbc^4 : a^4$, reducitur ad $yy - 2ay + 2axy : c + 2aaxx : cc + 2bx = 0$.

Capiatur ſecundo in portione ellipſis QS punctum aliquod M, ex quo etiam demittatur ad diametrum HK ordinata MO, ipſi AB occurrens in N. Et quamquam in iſto caſu maneat MN $= y$, fiet tamen AN $= - x$. Unde adhuc erit CN $= x + c + bcc : aa$, & FO $= sx : c + s + bsc : aa$; ſed MO erit ſemper $y - a + ax : c$: proindeque, ob naturam ellipſis, rurſus erit ut antea $yy - 2ay + 2axy : c + 2aaxx : cc + 2bx = 0$.

Capiatur tertio in portione ellipſis PHS punctum quodvis M, ex quo ſimiliter ducatur ad diametrum HK ordinata MO, ipſi AB

oc-

occurrens in N. Patetque, etiam in iſto caſu manere quidem MN $= y$, ſed fieri AN $= -x$. Hinc erit MO, vel $y - a + ax:c$, vel $-y + a - ax:c$; CN, vel $x + c + bcc:aa$, vel $-x - c - bcc:aa$; & FO, vel $sx:c + s + bsc:aa$, vel $-sx:c - s - bsc:aa - sx:c - s - bsc:aa$. Quare, ob ellipſis naturam, habebitur ſemper æquatio $yy - 2ay + 2axy:c + 2aaxx:cc + 2bx = 0$.

Capiatur demum in portione ellipſis AP punctum quodvis M, ex quo pariter demittatur ad diametrum HK ordinata MO, ipſi AB occurrens in N. Et quoniam in iſto caſu ſit, tam AN $= -x$, quam MN $= -y$; erit ſemper CN $= x + c + bcc:aa$, FO $= sx:c + s + bsc:aa$, & MO $= -y + a - ax:c$. Unde, propter ellipſim, adhuc habebitur æquatio $yy - 2ay + 2axy:c + 2aaxx:cc + 2bx = 0$, quam conſtruere oportebat.

VII. *Locorum ad ellipſim formula generalis exhibetur.*

VII. Atque ita quidem conſtruuntur loca ad ellipſim, per reductionem ſuarum æquationum ad formulam ſimpliciſſimam. Videamus itaque modo, *qua ratione eadem loca ad ellipſim conſtrui debeant, reducendo earum æquationes ad formulam, quæ ſit omnium maxime compoſita.* Quem in finem, qualis ſit iſtiuſmodi formula, operæ pretium eſt, ut primo loco definiamus.

Nimirum, referendo ellipſis puncta omnia ad rectam poſitione datam, per rectas alias, quæ ſint diametri alicujus ordinatæ; perſpicuum eſt, tria contingere poſſe. Primo, ut recta poſitione data ſit ipſa illa diameter. Secundo, ut ſit aliqua ejus parallela. Et tertio de-

Digitized by Google

demum, ut angulum cum eadem diametro conſtituat. Unde, ſicuti, ex tribus hiſce caſibus priores duo ſub tertio continentur; ita & formula ellipſis, omnium maxime compoſita, ea erit, quæ ex tertio illo caſu deducitur.

Sit igitur E centrum ellipſis, & HK aliqua ejus diameter; ſitque etiam HG recta, quæ exhibet, tum parametrum illius diametri, cum poſitionem ſuarum ordinatatum. Agatur deinde AD, eidem diametro parallela; & per aliquod ejus punctum A ducatur quoque obliqua AB. Sumatur poſtea in AB punctum quodvis C; & ductis rectis AF, CD, ipſi HG, parallelis, ponatur $AC = n$, $CD = m$, $AD = s$, EH, vel $EK = t$, $HG = p$, $AF = q$, & $EF = r$. FIG. 88.

Capiatur nunc in ellipſi punctum aliquod M, ex quo demittatur ad diametrum HK ordinata MO, conveniens cum AB in N, & cum AD in R; ponaturque adhuc $AN = x$, & $NM = y$. Quia ergo AN eſt ad NR, ut AC ad CD; erit $NR = mx:n$; adeoque, quum duæ AF, RO inter ſe ſint æquales, erit $MO = y + mx:n + q$. Et quoniam AN eſt ad AR, ut AC ad AD; erit AR, ſive $FO = sx:n$: proindeque erit $EO = r + sx:n$.

Jam, propter ellipſim, MO quadratum eſt ad differentiam quadratorum EH, EO, ut eſt HG ad HK. Quare erit, ut $yy + 2mxy:n + mmxx:nn + 2qy + 2qmx:n + qq$ ad $tt - rr - 2rsx:n - ssxx:nn$, ita p ad $2t$. Unde fiet $yy + 2mxy:n + mmxx:nn + 2qy + 2qmx:n + qq = pt:2 - prr:2t - prsx:tn - pssxx:2tnn$, ſive etiam $yy + 2mxy:n + mmxx:nn + pssxx:2tnn$

$+ 2qy + 2qmx : n + prsx : tn + qq - pt : 2 + prr : 2t = 0$: & propterea formulam ellipſis, omnium maxime compoſitam, comperta æquatio nobis exhibebit.

Perſpicuum eſt autem, in hujuſmodi formula coefficientem quadrati xx debere minui nonnihil, quo priores tres termini $yy + 2mxy : n + mmxx : nn + pssxx : 2tnn$ conſtituere queant quadratum perfectum; nec, deficiente termino $2mxy : n$, deficere quoque debere terminum alterum, in quo quadratum xx continetur. Unde veritas regulæ, ſuperius traditæ, pro cognoſcendis locis ad ellipſim, ex ipſa eorum formula generali prono alveo fluit.

VIII. *Quomodo per inventam formulam generalem loca ad ellipſim conſtruantur.*

VIII. Sed oſtendamus nunc, *quo pacto, ope inventæ formulæ generalis, loca ad ellipſim conſtruantur*. Nimirum, comparationis ope, definiendæ ſunt primum quantitates, quæ locum determinant. Et ſiquidem omnes inveniuntur poſitivæ; danda eſt rectis, quas referunt, illa eadem poſitio, quam in figura formulæ reperiuntur habere. Sed, ſi earum aliqua prodit negativa; tunc recta, quam exhibet, capienda eſt ad plagam oppoſitam.

Quantitates porro, quæ locum determinant, ſunt m, n, p, q, r, s, t. Verum, inſtituta comparatione, dumtaxat ipſarum p, q, r, t valores innoteſcunt. Et, quantum ad priores duas m, & n, nonniſi ratio, quam habent inter ſe, cognita fiet. Hinc valor unius ex iis ſumi poterit ad libitum. Et tunc, per cognitam rationem, quam inter ſe habent, etiam valor alterius notus evadet. Præſtat autem,

ut-

Digitized by Google

utcumque aſſumere valorem ipſius n, quem tamen poſitivum ſemper eſſe oportebit.

Determinatis valoribus ipſarum m, & n, etiam quantitatis s valor innoteſcet. In triangulo enim CAD notus eſt angulus ACD, velut æqualis angulo ANM, qui vel datus eſt, vel ſumitur ad libitum. Quare, ubi duo ejus latera AC, CD, deſignata per quantitates n, & m, ſimiliter nota ſunt; cognoſcemus quoque tertium latus AD, quod exhibet quantitas s. Speciatim autem erit $s = n$, ubi valor ipſius m nullus reperitur; quandoquidem, evaneſcente CD, cadit AB ſuper AD, & puncta duo C, & D coeunt in unum. FIG. 88.

Quantum ad valorem parametri p, ille nunquam negativus poteſt oriri. Unde, quod in conſtructione locorum ad parabolam obſervavimus, nequit hic locum habere. Potius valor ſemidiametri t oriri poteſt quandoque imaginarius. Et quum id contingit, indicio eſt, quæſitum locum contradictionem aliquam involvere. Nec reticebimus ejuſdem ſemidiametri valorem poſſe etiam interdum nihilo æqualem inveniri; & in eo caſu optata ellipſis ad ſimplex punctum reducetur.

IX. *Exemplum primum, caſu exhibens ſimpliciorem.*

IX. Oporteat itaque primo, *conſtruere æquationem* $yy - 2ay + axx : c - ac = 0$, *quæ locum exhibet ad ellipſim*. Quia in ea deeſt terminus xy; utique fractio $2m : n$, per quam ille in formula multiplicatus reperitur, debet eſſe nihilo æqualis. Unde, quum ſit $m = 0$; per ea, quæ paulo ante notata ſunt, erit quoque $n = s$; adeoque ipſa formula fiet $yy + pxx : 2t + 2qy + prx : t + qq - pt : 2 + prr : 2t = 0$.

Jam,

Jam, inſtituta comparatione, habebitur $p : 2t = a : c$, $2q = -2a$, $pr : t = o$, & $qq - pt : 2 + prr : 2t = -4ac$. Unde, ſicuti ex prima harum æquationum infertur, quod ratio parametri ad diametrum debeat eſſe æqualis ei, quam habet a ad c; ſic ex ſecunda eruitur $q = -a$, ex tertia $r = o$, & ex quarta $pt = 2aa + 2ac$.

Quum autem ſit $p : 2t = a : c$, erit etiam $p = 2at : c$, & $pt = 2att : c$. Eſt vero $pt = 2aa + 2ac$. Itaque erit $2att : c = 2aa + 2ac$, & $tt = ac + cc$. Hinc, per extractionem quadratæ radicis, fiet $t = \surd(ac + cc)$: proindeque, deſignatis valoribus incognitæ x per portiones
FIG. 89. AN rectæ AB, & exiſtente AL recta, cui eſſe debent æquidiſtantes valores alterius incognitæ y, conſtruetur propoſita æquatio in eum, qui ſequitur, modum.

Abſcindatur ex AL portio AF$= a$. Tum, ducta FO, ipſi AB parallela, capiatur ſuper ea hinc inde a puncto F, tam portio FH, quam portio FK $= \surd(ac + cc)$. Agatur poſtea HG, parallela rectæ AL, & conſtituatur eadem HG talis longitudinis, ut ſit HG ad HK in eadem ratione, quam habet a ad c. Denique diametro HK deſcribatur ellipſis, ita ut recta HG exhibeat, tam parametrum ejus diametri, quam poſitionem ſuarum ordinatarum. Et ellipſis, ſubinde deſcripta, locus erit quæſitus.

Ducatur enim ex puncto aliquo M ordinata ad diametrum MO, quæ extendatur uſque donec ipſi AB occurrat in N. Et, poſitis AN, ſive FO $= x$, & MN $= y$, erit ex con-

conſtructione $MO = y - a$. Sed, propter ellipſim, MO quadratum eſt ad differentiam quadratorum FH, FO, ut eſt HG ad HK. Quare erit, ut $yy - 2ay + aa$ ad $ac + cc - xx$, ita a ad c. Unde fiet $yy - 2ay + aa = aa + ac - axx : c$, ſive etiam $yy - 2ay + axx : c - ac = 0$, quæ eſt æquatio conſtruenda.

X. Oporteat etiam, *conſtruere æquationem* $yy - 2axy : c + 2aaxx : cc - 2by + aa = 0$, *quæ ſimiliter locum exhibet ad ellipſim.* Quia hic adeſt terminus xy; inſtituta comparatione, habebitur primo $2m:n = - 2a:c$. Quare, aſſumpta $n = c$, fiet $2m = - 2a$, ſive etiam $m = - a$. Comparatis autem terminis reliquis, habebitur quoque $mm: nn + pss: 2tnn = 2aa: cc$, $2q = - 2b$, $2qm: n + prs: tn = 0$, & $qq - pt: 2 + prr: 2t = aa$.

X. *Exemplum ſecundum, caſum maxime compoſitum continens.*

Hinc in prima harum æquationum, ſubrogatis valoribus ipſarum m, & n, fiet $aa:cc + pss: 2tcc = 2aa:cc$, ſive etiam $p:2t = aa:ss$. Unde infertur, rationem parametri ad diametrum æqualem eſſe debere ei, quam habet aa ad ss. Et quoniam ex ſecunda æquatione eruitur $q = - b$, habebitur ope tertiæ $pr : t = - 2ab:s$, ſive etiam $pr : 2t = - ab : s$. Quumque ſit $p: 2t = aa: ss$, erit per ſubſtitutionem $aar : ss = - ab: s$, atque adeo $r = - bs: a$.

Denique, ob quartam æquationem, erit $bb - pt :2 + bb = aa$, ſive etiam $4bb - 2aa = pt$. Quum autem habeatur $p: 2t = aa : ss$, fiet quoque $pt = 2aatt: ss$. Unde erit $2aatt: ss = 4bb - 2aa$, & $tt = 2bbss: aa - ss$: proindeque, per extractionem quadratæ radicis, habebitur $t = \sqrt{(2bbss: aa - ss)}$: adeo nempe, ut

niſi ſit $2bb$ major, quam aa, valor ipſius t, vel nullus, vel imaginarius prodibit.

Ponamus ergo, $2bb$ majorem eſſe, quam aa. Et, deſignatis valoribus incognitæ x per portiones AN rectæ AB, ſit AL ea, cui æqui-
FIG. 90. diſtantes eſſe debent valores alterius incognitæ y. Capiatur in AB portio AC $= c$. Et, ducta CD, ipſi AL parallela, fiat eadem CD $= a$, jungaturque AD. Abſcindatur deinde ex AL portio AF $= b$, perque punctum F agatur recta FEO, parallela ipſi AD. Fiat poſtea FE $= bs : a$. Et hinc inde a puncto E capiatur, tam portio EH, quam portio EK $= \sqrt{(2bbss:aa - ss)}$.

Ducatur porro HG, æquidiſtans eidem AL, & conſtituatur eadem HG talis longitudinis, ut ſit HG ad HK in eadem prorſus ratione, quam habet aa ad ss. Denique diametro HK deſcribatur ellipſis, ita ut HG exhibeat, tam parametrum ejus diametri, quam poſitionem ſuarum ordinatarum. Et ellipſis, ſubinde deſcripta, locus erit quæſitus. Quod ut palam fiat, ducatur ex puncto aliquo M ordinata ad diametrum MO, quæ occurrat ipſis AB, AD in N, & R; poſitiſque AN $= x$, & NM $= y$, erit, ob triangula æquiangula ACD, ANR, NR $= ax : c$, & AR, ſive FO $= sx : c$.

Hinc, quum ſit MR $= y - ax:c$, & AF, ſive RO $= b$; erit reliqua MO $= y - ax:c - b$. Eſt autem ex conſtructione FE $= bs:a$ Quare erit reliqua EO $= sx:c - bs:a$. Jam vero, propter ellipſim, MO quadratum eſt ad differentiam quadratorum EH, EO, ut eſt

HG

Digitized by Google

HG ad HK. Itaque, quum habeatur, ut $yy - 2axy:c + aaxx:cc - 2by + 2abx:c + bb$ ad $2bbss:aa - ss - ssxx:cc + 2bssx:ac - bbss:aa$, ita aa ad ss; erit $yy - 2axy:c + aaxx:cc - 2by + 2abx:c + bb = 2bb - aa - aaxx:cc + 2abx:c - bb$, quæ reducta exhibebit æquationem propoſitam $yy - 2axy:c + 2aaxx:cc - 2by + aa = 0$.

XI. *Præcedentis exempli caſus omnes expendantur.*

XI. In allato igitur exemplo, ut valor ſemidiametri t realis evadat, neceſſe eſt, ut $2bb$ major ſit, quam aa. Sed, ſi fuerit $2bb$ minor quam aa; tunc ejuſdem ſemidiametri valor prodibit imaginarius; adeoque ipſe locus conſtruendus contradictionem aliquam involvet. Et denique, ſi habeatur $2bb = aa$; tunc evaneſcet valor ſemidiametri t; atque adeo ipſa ellipſis deſcribenda in centro F tota colligetur.

Et ſane, quum æquatio conſtruenda ſit $yy - 2axy:c + 2aaxx:cc - 2by + aa = 0$, ſive etiam $yy - 2axy:c + aaxx:cc - 2by = - aaxx:cc - aa$; addendo utrique ejus parti communem quantitatem $2abx:c + bb$, fiet $yy - 2axy:c + aaxx:cc - 2by + 2abx:c + bb = bb + 2abx:c - aaxx:cc - aa$; adeoque, per extractionem quadratæ radicis, erit, vel $y = ax:c + b + \surd(bb + 2abx:c - aaxx:cc - aa)$ vel $y = ax:c + b - \surd(bb + 2abx:c - aaxx:cc - aa)$.

Hinc, ut valor incognitæ y realis reperiatur, neceſſe eſt, quantitatem $bb + 2abx:c - aaxx:cc - aa$, vel nullam eſſe, vel poſitivam. Talis autem eſſe non poteſt, quotieſcumque $2bb$ minor eſt, quam aa. Nam poſito, quod

O 2 ſit

ſit $2bb + ff = aa$, quantitas illa $bb + 2abx:c - aaxx:cc - aa$, ope ſubſtitutionis, mutabitur in hanc aliam $bb + 2abx:c - aaxx:cc - 2bb - ff$, ſive $- bb + 2abx:c - aaxx:cc - ff$, quam, velut compoſitam ex duobus quadratis negativis, liquet eſſe realem, & negativam.

Sed non perinde res eſt, quum $2bb$ major eſt, quam aa. Tunc enim poni debet $2bb - ff = aa$; adeoque, per ſubſtitutionem, quantitas $bb + 2abx:c - aaxx:cc - aa$ evadet $bb + 2abx:c - aaxx:cc - 2bb + ff$, hoc eſt $- bb + 2abx:c - aaxx:cc + ff$, quam, perſpicuum eſt, tunc tantum eſſe realem & negativam, quotieſcumque ff, ſive $2bb - aa$ minor eſt, quam $bb - 2abx:c + aaxx:cc$.

Nec item id accidit, quum habetur $2bb = aa$. Nam in iſto caſu illa eadem quantitas fiet $- bb + 2abx:c - aaxx:cc$, quæ nulla evadit, ſi ponatur $x = bc:a$. Atque hinc eſt, ut in hypotheſi, quod ſit $2bb = aa$, ellipſis tota in centro colligatur. Nimirum, quia in ea hypotheſi tunc tantum valor incognitæ y realis reperitur, quotieſcumque habetur $x = bc:a$.

XII. *Quid in compoſitione locorum ad ellipſim potiſſimum notari debeat.*

XII. Cæterum, *in compoſitione locorum ad ellipſim illud quoque ſedulo notari debet,* quod exiſtentibus x, & y duabus conſtruendæ æquationis incognitis, fieri quandoque poſſit, ut deſignari debeant per portiones AN rectæ AB valores incognitæ y, perque rectas NM valores alterius incognitæ x. Nec ſane in utraque loca conſtruendi ratione difficile erit definire, quando demum id fieri debeat.

Ni-

Nimirum, quum conſtruitur locus, per reductionem æquationis ad formulam ſimpliciſſimam, fieri id debet, quotieſcumque in æquatione reducta per fractionem aliquam multiplicatum reperitur quadratum, vel incognitæ x, vel ejus, quæ ex ipſa dependet. Sic æquatio $mxx:n - 2mx = 2ay - yy$ mutationem illam expoſcit. Nam, faciendo $x - n = z$, $a - y = u$, & $aa + mn = cc$, habetur loco ejus hæc alia $mzz:n = cc - uu$: ubi per fractionem $m:n$ reperitur multiplicatum quadratum incognitæ z, quæ dependet ex x; quum habeatur $x - n = z$.

Quotieſcumque vero conſtruitur locus, per reductionem æquationis ad formulam compoſitam, illud idem fieri debet, quando in æquatione conſtruenda quadratum incognitæ x ab omni fractione immune reperitur. Sic ſequens æquatio $xx - 2axy:c + 2aayy:cc - 2ax - 2by + cc = 0$ exigit quoque eam variationem, quia quadratum incognitæ x illud eſt, quod in ea omni fractione denudatum occurrit.

Interim, quum conſtruitur æquatio, per reductionem ad formulam compoſitam, eademque natura ſua mutationem illam expoſcit, neceſſe eſt, ut etiam in formula incognitæ varientur. Sic formula, cum qua comparanda eſt æquatio $xx - 2axy : c + 2aayy : cc - 2ax - 2by + cc = 0$, haud quidem eſſe debet $yy + 2mxy:n + mmxx: nn + pssxx: 2tnn + 2qy + 2qmx:n + prsx:tn + qq - pt:2 + prr:2t = 0$, ſed $xx + 2myx:n + mmyy:nn + pssyy:2tnn + 2qx + 2qmy:n + prsy: tn + qq - pt:2 + prr:2t = 0$.

Digitized by Google

Fatendum eſt tamen, variationem iſtam non eſſe abſolute neceſſariam. Nam in priore exemplo, etſi per reductionem habeatur $mzz:n = cc - uu$; multiplicando tamen omnes æquationis terminos per n, eoſdemque dividendo per m, fiet $zz = ncc:m - nuu:m$, ſive etiam $nuu : m = ncc : m - zz$: ubi per fractionem $n:m$ multiplicatum reperitur quadratum incognitæ u, quæ dependet ex y; quum habeatur $a - y = u$.

Atque ita quoque in ſecundo exemplo, etſi æquatio ſit $xx - 2axy : c + 2aayy : cc - 2ax - 2by + cc = 0$; multiplicatis tamen terminis omnibus per cc, iiſdemque diviſis per $2aa$, habebitur $ccxx:2aa - cxy:a + yy - ccx:a - bccy:aa + c^4:2aa = 0$: ubi quadratum incognitæ y omni vacat fractione. Nec difficile erit intelligere, quod hoc idem præſtari poſſit in omnibus æquationibus, quæ ad ellipſim nos manuducunt.

XIII. *Quomodo conſtruenda ſint loca, quæ circuli circumferentia terminantur.*

XIII. Quantum *ad compoſitionem locorum, quæ circuli circumferentia terminantur*, ea fieri debet, perinde ac ſi loca ipſa eſſent ad ellipſim; quum revera circulus velut ſpecies quædam ellipſis debeat haberi. Innoteſcet autem, locum eſſe ad circulum, quotieſcumque, conſtructo loco, parameter ſit æqualis diametro, ad quam refertur, itemque ordinatæ rectos cum eadem diametro angulos conſtituunt; quum non aliter ellipſis in circulum abire queat, quam quum duo iſta contingunt.

Proponatur, exempli gratia, conſtruenda æquatio $yy - 2ay = 2bx - xx$, quæ ad el-

Digitized by Google

ellipſim nos ducit. Fiat, tum $y - a = z$, cum $b - x = u$. Et quoniam habetur $yy - 2ay = zz - aa$, & $2bx - xx = bb - uu$; erit per ſubſtitutionem $zz - aa = bb - uu$, ſive etiam $zz = aa + bb - uu$. Ponatur quoque $aa + bb = cc$; & erit $zz = cc - uu$ æquatio reducta.

Ducatur jam in ſubjecto plano recta quævis AB, ex qua abſcindatur portio AC $= b$. Et ſiquidem deſignentur per portiones AN iſtius AC valores incognitæ x, fiet unaquæque reliquarum portionum $CN = b - x$; adeoque, quum habeatur $b - x = u$, ipſæ CN deſignabunt valores incognitæ u. FIG. 91.

Sit deinde CD recta, cui eſſe debent æquidiſtantes ipſæ NM, quæ valores referunt alterius incognitæ y. Et quoniam in reductione habetur $y - a = z$, abſcindatur ex CD portio $CE = a$; & ducta per punctum E recta EF, ipſi CA parallela, fiet quælibet $OM = y - a$; adeoque ipſæ OM valores referent incognitæ z.

Denique, quum æquatio reducta ſit $zz = cc - uu$, liquet, quod ſi hinc inde a puncto E capiatur, tum EF, cum $EG = c$, debeat eſſe FG quæſitæ ellipſis diameter. Et quemadmodum, ducta FH, ipſi CD parallela, diametri ejus ordinatæ debent eſſe æquidiſtantes rectæ FH; ita ſi fiat, ut FH ſit ad FG in ratione æqualitatis, erit eadem FH parameter illius diametri.

In constructo igitur loco inventa eſt parameter FH æqualis diametro FG, ad quam refertur. Unde, ſi ordinatæ ejuſdem diame-

tri OM rectos cum ipſa angulos conſtituant, jam ellipſis vertetur in circulum; adeoque componetur quæſitus locus, deſcribendo circuli circumferentiam ex puncto E tanquam centro, & intervallo ipſius EF, ſive EG.

C A P. V.

De conſtructione locorum ad hyperbolam, relate ad diametros conſideratam.

I. *Locorum ad hyperbolam, relate ad diametros conſideratam formula ſimpliciſſima definitur.*

I. Reliquum jam eſt, ut conſtructionem locorum oſtendamus, quæ ad hyperbolam nos ducunt. Hujuſmodi loca duplicis ſpeciei eſſe poſſunt. Nam hyperbola, per quam terminantur, conſiderari poteſt, vel relate ad ejus diametros, vel in ordine ad ſuas aſymptotos. Unde eorundem locorum conſtructionem duobus etiam capitibus complectemur; & in iſto quidem agemus de locis illis, in quibus hyperbola relate ad diametros conſideratur; tum capite ſequenti ea proſequemur, in quibus hyperbola ſub contemplationem venit relate ad aſymptotos.

Tradituri autem conſtructionem locorum ad hyperbolam, relate ad ejus diametros conſideratam, oſtendemus primo loco, qua ratione ea conſtrui debeant, adhibita formula, quæ caſum continet, omnium ſimpliciſſimum. Et in hyperbola quoque, non ſecus ac in parabola, & ellipſi, caſus ſimpliciſſimus ha-

habetur, quum *ejus puncta omnia ad aliquam ipſius diametrum referuntur per rectas, quæ ſint diametri illius ordinatæ.*

Sit ergo A centrum hyperbolæ, & BC aliqua ipſius diameter. Sit etiam BD, tum parameter ejus diametri, cum recta, cui omnes ejuſdem diametri ordinatæ ſunt parallelæ. Capiatur in hyperbola punctum aliquod M, ex quo demittatur ad diametrum BC recta MN, ipſi BD parallela. Tum ponatur AN $=$ x, MN $= y$, & AB, vel AC $= d$. FIG. 92.

Jam, ob naturam hyperbolæ, MN quadratum eſt ad differentiam quadratorum AN, AB, ut eſt BD ad BC. Quare, ſi ponamus, BD eſſe ad BC, ut eſt n ad m; erit, ut n ad m, ita yy ad $xx - dd$: proindeque hyperbolæ localis æquatio erit $myy : n = xx - dd$. Unde ſemper ac æquatio aliqua ad iſtiuſmodi formam reduci poterit, tunc ea ad hyperbolam, relate ad diametros conſideratam, proculdubio nos manuducet.

Sed notetur hoc loco velim, quod etſi ordinata MN ducatur in hyperbola oppoſita, adhuc tamen æquatio localis hyperbolæ ſit $myy: n = xx - dd$. Nam, licet in hoc caſu habeatur AN $= -x$, nihilominus ejus quadratum eſt ſemper xx. Et ob eandem rationem eadem adhuc erit hyperbolæ æquatio localis, ubi ordinata ducitur ad diametri partem oppoſitam; quia, etſi fiat MN $= -y$, quadratum tamen ex MN ſemper erit yy.

II. Neque vero difficile erit definire, *qualis eſſe debeat æquatio, quæ ſubinde reduci poſſit, ut formam induat iſtius* $myy:n = xx - dd$. II. *Quæ æquationes ad formulam illam ſimpli-*

ciſſimam ſunt reducibiles.

dd. Primo enim, ſi in æquatione incognitæ duæ non reperiuntur ſimul multiplicatæ, reducetur ad eam formam talis æquatio, ſi ab utraque ejus parte exiſtant quadrata incognitarum iiſdem ſignis affecta.

Proponatur, exempli gratia, æquatio $ayy:c - 2ay + ac = 2bx + xx$. Fiat $x + b = u$. Et quoniam habetur $2bx + xx = uu - bb$; ſubſtitutione peracta, erit $ayy:c - 2ay + ac = uu - bb$, ſive etiam $yy - 2cy + cc = cuu:a - cbb:a$. Fiat quoque $y - c = z$. Cumque habeatur $yy - 2cy + cc = zz$; erit rurſus per ſubſtitutionem $zz = cuu:a - cbb:a$, ſive etiam $azz:c = uu - bb$, quæ eſt ejuſdem formæ cum æquatione hyperbolæ locali $myy:n = xx - dd$.

Quod ſi autem in æquatione incognitæ duæ ſimul multiplicatæ reperiantur; tunc, ut illiuſmodi æquatio formam induat iſtius $myy:n = xx - dd$, oportebit, utriuſque incognitæ quadratum ita quidem in ea contineri, ut translatis ad eandem æquationis partem, tum terminis, quadrata illa continentibus, cum termino, incognitarum productum includente, debeat coefficiens unius quadrati augeri nonnihil, quo termini ii poſſint ſimul quadratum perfectum conſtituere.

Ita ſi æquatio fuerit $yy - 2ay + 4axy:c + 3aaxx:cc + 2bx = 0$, ponendo $y - a + 2ax:c = z$, erit $yy - 2ay + 4axy:c + 3aaxx:cc = zz + 4aax:c - aa - aaxx:cc$. Quare, ope ſubſtitutionis, fiet $zz + 4aax:c - aa - aaxx:cc + 2bx = 0$, ſive etiam $cczz:aa + 4cx - cc - xx + 2ccbx:aa = 0$. Hinc, ponendo quoque $x -$

2c

$2c - ccb:aa = u$, ita ut ſit $4cx - 2ccbx:aa - xx = 4cc + 4bc^3:aa + bbc^4:a^4 - uu$; erit rurſus per ſubſtitutionem $cczz:aa + 3cc + 4bc^3:aa + bbc^4:a^4 - uu = o$. Et, faciendo adhuc $3cc + 4bc^3:aa + bbc^4:a^4 = ff$, erit demum $cczz:aa + ff - uu = o$, ſive etiam $cczz:aa = uu - ff$.

III. Sed exemplis modo oſtendamus, *qua ratione, per reductionem æquationis ad formulam ſimpliciſſimam, conſtruantur loca ad hyperbolam, relate ad diametros conſideratam.* Primo itaque proponatur conſtruenda æquatio $ayy:c - 2ay + ac = 2bx + xx$, quæ, ut paulo ante oſtenſum eſt, reducitur ad $azz:c = uu - bb$, ponendo $x + b = u$, & $y - c = z$. III. *Oſtenditur exemplis conſtructio locorum ad hyperbolam. Exemplum primum.*

Ducatur in ſubjecto plano recta quævis AB, per cujus portiones AN deſignentur valores incognitæ x. Et quoniam in reductione habetur $x + b = u$, capiatur ad partem oppoſitam portio AC $= b$. Quumque fiat quælibet CN $= x + b$, deſignabunt ipſæ CN valores incognitæ u. FIG. 93.

Sit deinde CD recta, cui eſſe debent æquidiſtantes ipſæ NM, quæ valores referunt alterius incognitæ y. Et quoniam in reductione habetur quoque $y - c = z$, abſcindatur ex CD portio CE $= c$; & ducta per punctum E recta EF ipſi CA parallela, fiet quælibet OM $= y - c$; atque adeo ipſæ OM valores referent incognitæ z.

Denique, quum æquatio reducta ſit $azz:c = uu - bb$, liquet, quod ſi hinc inde a puncto E capiatur, tum EF, cum EG $= b$, debeat eſſe FG quæſitæ hyperbolæ diameter.

Et

Et quemadmodum, ducta FH, ipſi CD parallela, diametri ejus ordinatæ debent eſſe æquidiſtantes rectæ FH; ita, ſi fiat, ut FH ſit ad FG, veluti eſt c ad a, erit eadem FH parameter illius diametri.

IV. *Demonſtratio conſtructionis præcedentis exempli in medium affertur.*

FIG. 93.

IV. Ut autem oſtendere poſſimus, *hyperbolam iſtam eſſe lineam, ad quam refertur æquatio* $ayy : c - 2ay + ac = 2bx + xx$, juvat prius advertere, quod ſi ſuper CB capiatur hinc inde a puncto C, tum CK, cum CL $= \surd (ac + bb)$; hyperbola quidem principalis tranſire debeat per punctum K, ejus vero oppoſita per punctum L. Nam in æquatione, de qua agitur, ſi ponatur $y = 0$, habebitur $ac = 2bx + xx$, unde infertur, tum $x = - b + \surd (ac + bb)$, cum $x = - b - \surd (ac + bb)$.

Id quum ita ſit, capiatur primo in portione hyperbolæ principalis KFX punctum aliquod M, ex quo demittatur ad diametrum FG ordinata MO, ipſi AB occurrens in N. Jamque, poſitis AN $= x$, & MN $= y$, erit ex conſtructione CN, ſive EO $= x + b$, & MO eſſe poterit, vel $y - c$, vel $- y + c$. Sed, propter hyperbolam, MO quadratum eſt ad differentiam quadratorum EO, EF, ut eſt FH ad FG. Quare erit, ut $yy - 2cy + cc$ ad $xx + 2bx + bb - bb$, ita c ad a: Unde fiet $ayy : c - 2ay + ac = xx + 2bx$.

Capiatur ſecundo in portione altera ejuſdem hyperbolæ principalis KZ punctum aliquod M, ex quo etiam demittatur ad diametrum FG ordinata MO, ipſi AB occurrens in N. Et quamquam in iſto caſu maneat AN $= x$; fiet tamen MN $= - y$. Unde erit ſemper

per CN, ſive EO $= x + b$, & MO $= -y + c$; atque adeo, ob hyperbolæ naturam, erit rurſus ut antea $ayy : c - 2ay + ac = xx + 2bx$.

Capiatur tertio in portione hyperbolæ oppoſitæ LGX punctum quodvis M, ex quo adhuc ducatur ad diametrum FG ordinata MO, ipſi AB occurrens in N. Et quoniam in iſto caſu ſit AN $= -x$, & MN $= y$; erit CN, ſive EO $= -x - b$, & MO eſſe poterit, vel $y - c$, vel $-y + c$. Quare, ob hyperbolæ naturam, habebitur ſemper æquatio $ayy : c - 2ay + ac = xx + 2bx$.

Capiatur demum in portione altera ejuſdem hyperbolæ oppoſitæ LZ punctum quodvis M, ex quo pariter demittatur ad diametrum FG ordinata MO, ipſi AB occurrens in N. Quumque in iſto caſu fiat AN $= -x$, & MN $= -y$; erit ſemper CN, ſive EO $= -x - b$, & MO $= -y + c$. Unde, propter naturam hyperbolæ, adhuc habebitur æquatio $ayy : c - 2ay + ac = xx + 2bx$.

V. Proponatur ſecundo *conſtruenda æquatio altera, ſuperius allata*, $yy - 2ay + 4axy : c + 3aaxx : cc + 2bx = 0$, quæ, ut ibidem oſtenſum eſt, reducitur ad $cczz : aa = uu - ff$, ponendo $y - a + 2ax : c = z$, $x - 2c - ccb : aa = u$, & $3cc + 4bc^3 : aa + bbc^4 : a^4 = ff$. V. *Exemplum ſecundum, caſum exhibens paulo difficiliorem*

Ducatur in ſubjecto plano recta quævis AB, & per portiones ejus AN deſignentur valores incognitæ x. Quumque habeatur $x - 2c - ccb : aa = u$, abſcindatur ex AB portio AC $= 2c + ccb : aa$. Et quoniam ſit quælibet CN $= x - 2c - ccb : aa$, deſignabunt FIG. 94.

bunt portiones CN valores incognitæ *u*.

Sit deinde CD recta, cui eſſe debent æquidiſtantes ipſæ NM, quæ valores referunt alterius incognitæ *y*. Et quoniam in reductione habetur $y - a + 2ax:c = z$, abſcindatur, tum ex CD portio CE $= a$, cum ex EC, producta ſi opus, portio EF, quæ ſit ad AC, ut eſt $2a$ ad c. Jamque, completo parallelogrammo AE, ductaque FG, ipſis NM occurrente in O, fiet unaquæque OM $= y - a +$ $2ax:c$; adeoque ipſæ OM valores referent incognitæ *z*.

Quoniam autem rectæ OM correſpondent portionibus ipſius FG; utique debet eſſe F centrum deſcribendæ hyperbolæ, & FG poſitio ſuæ diametri. Verum portiones illæ FO tunc demum reperiuntur æquales ipſis CN, ubi æquales ſunt duæ AC, FG. Unde procul eſt, ut eædem FO deſignare queant valores incognitæ *u*; adeoque, etſi æquatio reducta ſit $cczz: aa = uu - ff$, multum tamen abeſt, ut ſit f ſemidiameter quæſitæ hyperbolæ, & ut ratio parametri ad diametrum ſit æqualis ei, quam habet aa ad cc.

Itaque, ut definiamus, tum ſemidiametrum deſcribendæ hyperbolæ, cum rationem parametri ad diametrum, ſit AC ad FG, ut eſt c ad s. Quumque hac ratione fiat quælibet FO $= su:c$; ſi ponamus ulterius, quod quæſita ſemidiameter ſit g, & quod ratio parametri ad diametrum ſit æqualis ei, quam habet n ad m, erit ejuſdem hyperbolæ localis æquatio $mzz:n = ssuu : cc - gg$, ſive etiam $ccmzz:ssn = uu - ccgg:ss$. Erat autem $cczz:aa$

$= uu$

$= uu - ff$. Quare, inſtituta comparatione, fiet $ccm : ssn = cc : aa$, & $ccgg : ss = ff$. Unde infertur $n : m = aa : ss$, & $g = fs : c$.

Capiatur ergo ſuper FG hinc inde a puncto F, tum FH, cum FK $= fs : c$; & erit HK diameter quæſitæ hyperbolæ. Ducatur porro per punctum H, recta HL, ipſi CD parallela; & fient diametri ejus ordinatæ æquidiſtantes rectæ HL. Conſtituatur demum HL talis longitudinis, ut ſit HL ad HK, veluti eſt aa ad ss; & erit eadem HL parameter illius diametri.

VI. Hic etiam, ut oſtendere poſſimus, *hujuſmodi hyperbolam ſatisfacere propoſitæ æquationi* $yy - 2ay + 4axy : c + 3aaxx : cc + 2bx = 0$, juvat prius advertere, quod ſi ſuper AB capiatur ad partem oppoſitam portio AP $= 2bcc : 3aa$, hyperbola quidem principalis nullimode ſecet rectam AB, ejus autem oppoſita tranſire debeat per puncta duo A, & P. Nam in æquatione, de qua agitur, ſi ponatur $y = 0$, fiet $3aaxx : cc + 2bx = 0$, unde infertur, tum $x = 0$, cum $x = - 2bcc : 3aa$. IV. *Veritas conſtructionis præcedentis exempli demonſtratur.* FIG. 94.

Id quum ita ſit, capiatur primo in hyperbola principali punctum aliquod M, ex quo demittatur ad diametrum HK ordinata MO, ipſi AB occurrens in N. Et quoniam hic poni debet AN $= x$, & MN $= - y$; erit ex conſtructione CN $= x - 2c - ccb : aa$, & MO vel $y - a + 2ax : c$ vel $- y + a - 2ax : c$. Sed CN eſt ad FO, ut AC ad FG, ſive etiam, ut c ad s. Quare erit FO $= sx : c - 2s - bsc : aa$.

Quia autem, propter hyperbolam, MO qua-

quadratum eſt ad differentiam quadratorum FO, FH, veluti eſt HL ad HK; erit, ut $yy - 2ay + aa + 4axy:c - 4aax:c + 4aaxx:cc$ ad $ssxx:cc - 4ssx:c + 4ss - 2bssx:aa + 4bssc:aa + bbsscc:a^4 - ffss:cc$, ita aa ad ss. Unde fiet $yy - 2ay + aa + 4axy:c - 4aax:c + 4aaxx:cc = aaxx:cc - 4aax:c + 4aa - 2bx + 4bc + bbcc:aa - ffaa:cc$, quæ, translatis terminis omnibus ad eandem partem, & poſito loco ff valore ejus $3cc + 4bc^3:aa + bbc^4:a^4$, reducitur ad $yy - 2ay + 4axy:c + 3aaxx:cc + 2bx = 0$.

Extendatur deinde in hyperbola oppoſita ordinata AG verſus I, & capiatur in portione ejus AKI punctum aliquod M, ex quo etiam demittatur ad diametrum HK ordinata MO, ipſi AB occurrens in N. Et quamquam in iſto caſu maneat AN $= x$, fiet tamen CN $= - x + 2c + ccb:aa$; adeoque erit FO $= - sx:c + 2s + bsc:aa$. Quumque hic poni debeat MN $= y$; erit adhuc MO, vel $y - a + 2ax:c$, vel $- y + a - 2ax:c$: proindeque, ob naturam hyperbolæ, rurſus erit ut antea $yy - 2ay + 4axy:c + 3aaxx:cc + 2bx = 0$.

Capiatur tertio in portione hyperbolæ oppoſitæ AP punctum quodvis M, ex quo ſimiliter ducatur ad diametrum HK ordinata MO, ipſi AB occurrens in N. Patetque, in iſto caſu fieri, tum AN $= - x$, cum MN $= - y$. Et erit ſemper, tam CN $= - x + 2c + ccb:aa$, quam MO $= - y + a - 2ax:c$. Unde, quum habeatur FO $= - sx:c + 2s + bsc:aa$; ob hyperbolæ naturam, invenietur ſemper æquatio $yy - 2ay + 4axy:c + 3aaxx:cc + 2bx = 0$.

Ca-

Capiatur demum punctum M in aliqua duarum reliquarum portionum hyperbolæ oppoſitæ, ex quo pariter demittatur ad diametrum HK ordinata MO, ipſi AB occurrens in N. Et quoniam in iſto caſu ſit $AN = -x$, & $MN = y$; erit ſemper $CN = -x + 2c + ccb:aa$, & $FO = -sx:c + 2s + bsc:aa$. Et licet MO eſſe poſſit, vel $y - a + 2ax:c$, vel $-y + a - 2ax:c$; attamen, ob naturam hyberbolæ, ſemper habebitur æquatio $yy - 2ay + 4axy:c + 3aaxx:cc + 2bx = o$.

VII. *Locorum ad hyperbolam, relate ad diametros conſideratam, formula generalis exhibetur.*

VII. Atque ita quidem conſtruuntur loca ad hyperbolam, relate ad ejus diametros conſideratam, per reductionem ſuarum æquationum ad formulam ſimpliciſſimam. Videamus itaque modo, *qua ratione eadem loca ad hyperbolam conſtrui debeant, reducendo earum æquationes ad formulam, quæ ſit omnium maxime compoſita*. Quem in finem, qualis ſit ejuſmodi formula, operæ pretium eſt, ut primo loco definiamus.

Nimirum, referendo hyperbolæ puncta omnia ad rectam poſitione datam, per rectas alias, quæ ſint diametri alicujus ordinatæ, perſpicuum eſt, tria contingere poſſe. Primo, ut recta poſitione data ſit ipſa illa diameter. Secundo, ut ſit aliqua ejus parallela. Et tertio demum, ut angulum cum eadem diametro conſtituat. Unde, ſicuti ex tribus hiſce caſibus priores duo ſub tertio continentur, ita & formula hyperbolæ, relate ad diametros conſideratæ, omnium maxime compoſita, ea erit, quæ ex tertio illo caſu deducitur.

Sit igitur F centrum hyperbolæ, & HK ali- Fig. 95.

aliqua ejus diameter; ſitque etiam HG recta, quæ exhibet, tum parametrum illius diametri, cum poſitionem ſuarum ordinatarum. Agatur deinde AD, eidem diametro parallela; & per aliquod ejus punctum A ducatur quoque obliqua AB. Sumatur poſtea in AB punctum quodvis C; & ductis rectis AF, CD, ipſi HG parallelis, ponatur $AC = n$, $CD = m$, $AD = s$, EH, vel $EK = t$, $HG = p$, $AF = q$, & $EF = r$.

Capiatur nunc in hyperbola punctum aliquod M, ex quo demittatur ad diametrum HK ordinata MO, conveniens cum AB in N, & cum AD in R; ponaturqne adhuc $AN = x$, & $MN = y$. Quia ergo AN eſt ad NR, ut AC ad CD; erit $NR = mx:n$; adeoque, quum duæ AF, RO inter ſe ſint æquales, erit $MO = y + mx:n + q$. Et quoniam AN eſt ad AR, ut AC ad AD; erit AR, ſive $FO = sx:n$: proindeque erit $EO = r + sx:n$.

Jam, propter hyperbolam, MO quadratum eſt ad differentiam quadratorum EO, EH, ut eſt HG ad HK. Quare erit, ut $yy + 2mxy:n + mmxx:nn + 2qy + 2qmx:n + qq$ ad $rr + 2rsx:n + ssxx:nn - tt$, ita p ad $2t$. Unde fiet $yy + 2mxy:n + mmxx:nn + 2qy + 2qmx:n + qq = prr:2t + prsx:tn + pssxx:2tnn - pt:2$, ſive etiam $yy + 2mxy:n + mmxx:nn - pssxx:2tnn + 2qy + 2qmx:n - prsx:tn + qq + pt:2 - prr:2t = 0$: & propterea formulam hyperbolæ, relate ad diametros conſideratæ, omnium maxime compoſitam, comperta æquatio nobis exhibebit.

Perſpicuum eſt autem, in hujuſmodi for-

formula coefficientem quadrati xx augendum eſſe nonnihil, quo priores tres termini $yy + 2mxy:n + mmxx:nn - pssxx:2tnn$ conſtituere queant quadratum perfectum; nec, deficiente termino $2mxy:n$, deficere quoque debere terminum alterum, in quo quadratum xx continetur. Unde veritas regulæ, ſuperius traditæ, pro cognoſcendis locis ad hyperbolam, relate ad ſuas diametros conſideratam, ex ipſa eorum formula generali, prono alveo fluit.

VIII. Sed oſtendamus modo, *quo pacto, ope inventæ formulæ generalis, loca ad hyperbolam, relate ad diametros conſideratam, conſtruantur*. Nimirum, comparationis ope, definiendæ ſunt primum quantitates, quæ locum determinant. Et ſiquidem omnes inveniuntur poſitivæ; danda eſt rectis, quas referunt, illa eadem poſitio, quam in figura formulæ reperiuntur habere. Sed ſi earum aliqua prodit negativa; tunc recta, quam exhibet, capienda eſt ad plagam oppoſitam.

VIII. *Quomodo per inventam formulam generalem loca ad hyperbolam, relate ad diametros conſideratam, conſtruantur.*

Quantitates porro, quæ locum determinant, ſunt m, n, p, q, r, s, t. Verum, inſtituta comparatione, dumtaxat ipſarum p, q, r, t valores innoteſcunt. Et, quantum ad priores duas m, & n, nonniſi ratio, quam habent inter ſe, cognita fiet. Hinc valor unius ex iis ſumi poterit ad libitum. Et tunc, per cognitam rationem, quam inter ſe habent, etiam valor alterius notus evadet. Præſtat autem, utcumque aſſumere valorem ipſius n, quem tamen poſitivum ſemper eſſe oportebit.

Determinatis valoribus ipſarum m, & n,

Digitized by Google

FIG. 95. etiam quantitatis s valor innoteſcet. In triangulo enim CAD notus eſt angulus ACD, velut æqualis angulo ANM, qui vel datus eſt, vel ſumitur ad libitum. Quare, ubi duo ejus latera, deſignata per quantitates n, & m, ſimiliter nota ſunt; cognoſcemus quoque tertium latus AD, quod exhibet quantitas s. Speciatim autem erit $s = n$, ubi valor ipſius m nullus reperitur; quandoquidem, evaneſcente CD, cadit AB ſuper AD, & puncta duo C, & D coeunt in unum.

Hic etiam notare oportet, quod, perinde ac in locis ad ellipſim, valor parametri p numquam negativus poſſit oriri. Unde, quod in conſtructione locorum ad parabolam obſervavimus, hic quoque nequit locum habere. Potius valor ſemidiametri t oriri poteſt quandoque imaginarius. Et quum id contingit, haud quidem putandum eſt, quæſitum locum contradictionem aliquam involvere; ſed tantum per hyperbolas conjugatas ille debet explicari. Nec reticebimus, ejuſdem ſemidiametri valorem poſſe etiam interdum nihilo æqualem inveniri; & in eo caſu optata hyperbola ad duplicem rectam reducetur.

IX. *Exemplum primum, caſum exhibens paulo ſimpliciorem.*

IX. Oporteat itaque primo, *conſtruere æquationem* $yy - 2ay - axx:c + aa + ab = 0$. Quia in ea deeſt terminus xy; utique fractio $2m:n$, per quam ille in formula multiplicatus reperitur, debet eſſe nihilo æqualis. Unde, quum ſit $m = 0$; per ea, quæ paulo ante notata ſunt, erit quoque $n = s$; adeoque ipſa formula fiet $yy - pxx:2t + 2qy - prx:t + qq + pt:2 - prr:2t = 0$.

Jam,

Jam, inſtituta comparatione, habebitur $p:2t = a:c$, $2q = -2a$, $pr:t = 0$, & $qq + pt:2 - prr:2t = aa + ab$. Unde, ſicuti ex prima harum æquationum infertur, quod ratio parametri ad diametrum debeat eſſe æqualis ei, quam habet a ad c; ſic ex ſecunda eruitur $q = -a$, ex tertia $r = 0$, & ex quarta $pt = 2ab$.

Quum autem ſit $p:2t = a:c$; erit etiam $p = 2at:c$, & $pt = 2att:c$. Eſt vero $pt = 2ab$. Itaque erit $2att:c = 2ab$, & $tt = bc$. Hinc, per quadratæ radicis extractionem, fiet $t = \surd bc$: proindeque, deſignatis valoribus incognitæ x per portiones AN rectæ AB, & exiſtente AL recta, cui eſſe debent æquidiſtantes valores alterius incognitæ y, conſtruetur propoſita æquatio in eum, qui ſequitur, modum. FIG. 96.

Abſcindatur ex AL portio AF $= a$. Tum, ducta FO, ipſi AB parallela, capiatur ſuper ea hinc inde a puncto F, tam portio FH, quam portio FK $= \surd bc$. Agatur poſtea HG, parallela rectæ AL, & conſtituatur eadem HG talis longitudinis, ut ſit HG ad HK in eadem ratione, quam habet a ad c. Denique diametro HK deſcribatur hyperbola, ita ut HG exhibeat, tam parametrum ejus diametri, quam poſitionem ſuarum ordinatarum. Et hyperbola, ſubinde deſcripta, locus erit quæſitus.

Ducatur enim ex puncto aliquo M ordinata ad diametrum MO, quæ extendatur uſque donec, ipſi AB occurrat in N. Et, poſitis AN, ſive FO $= x$, & MN $= y$, erit ex

 con-

Digitized by Google

conſtructione MO $= y - a$. Sed, propter hyperbolam, MO quadratum eſt ad differentiam quadratorum FO, FH, ut eſt HG ad HK. Quare erit, ut $yy - 2ay + aa$ ad $xx - bc$, ita a ad c. Unde fiet $yy - 2ay + aa = axx : c - ab$, ſive etiam $yy - 2ay - axx : c + aa + ab = 0$, quæ eſt æquatio conſtruenda.

X. *Exemplum ſecundum, caſum maxime compoſitum continens.*

X. Oporteat etiam, *conſtruere æquationem* $yy - 2axy : c - aaxx : cc - 2by + aa = 0$, *quæ ſimiliter locum exhibet ad hyperbolam*. Quia hic adeſt terminus xy; inſtituta comparatione, habebitur primo $2m : n = - 2a : c$. Quare, aſſumpta $n = c$, fiet $2m = - 2a$, ſive etiam $m = - a$. Comparatis autem terminis reliquis, habebitur quoque $mm : nn - pss : 2tnn = - aa : cc$, $2q = - 2b$, $2qm : n - prs : tn = 0$, & $qq + pt : 2 - prr : 2t = aa$.

Hinc in prima harum æquationum, ſubrogatis valoribus ipſarum m, & n, fiet $aa : cc - pss : 2tcc = - aa : cc$, hoc eſt $2aa : cc = pss : 2tcc$, ſive etiam $p : 2t = 2aa : ss$. Unde infertur, rationem parametri ad diametrum æqualem eſſe debere ei, quam habet $2aa$ ad ss. Et quoniam ex ſecunda æquatione eruitur $q = - b$, habebitur ope tertiæ $pr : t = 2ab : s$, ſive etiam $pr : 2t = ab : s$. Quumque ſit $p : 2t = 2aa : ss$; erit per ſubſtitutionem $2aar : ss = ab : s$, atque adeo $r = bs : 2a$.

Denique, ob quartam æquationem, erit $bb + pt : 2 - bb : 2 = aa$, ſive etiam $aa - bb : 2 = pt : 2$, aut $2aa - bb = pt$. Quum autem habeatur $p : 2t = 2aa : ss$, fiet quoque

pt

Digitized by Google

$pt = 4aatt : ss$. Unde erit $4aatt : ss = 2aa - bb$, & $tt = ss:2 - bbss:4aa$: proindeque, per extractionem quadratæ radicis, habebitur $t = \surd (ss:2 - bbss:4aa)$: adeo nempe, ut niſi ſit $2aa$ major, quam bb, valor ipſius t, vel nullus, vel imaginarius prodibit.

Ponamus ergo, $2aa$ majorem eſſe, quam bb. Et, deſignatis valoribus incognitæ x per portiones AN rectæ AB, ſit AL ea, cui æquidiſtantes eſſe debent valores alterius incognitæ y. Capiatur in AB portio AC $= c$. Et, ducta CD, ipſi AL parallela, fiat eadem CD $= a$, jungaturque AD. Abſcindatur deinde ex AL portio AF $= b$, perque punctum F agatur recta EO parallela ipſi AD. Fiat poſtea FE $= bs:2a$. Et hinc inde a puncto E capiatur, tam portio EH, quam portio EK $= \surd (ss:2 - bbss:4aa)$. Fig. 97.

Ducatur porro HG, æquidiſtans eidem AL, & conſtituatur eadem HG talis longitudinis, ut ſit HG ad HK in eadem ratione, quam habet $2aa$ ad ss. Denique diametro HK deſcribatur hyperbola, ita ut HG exhibeat, tam parametrum ejus diametri, quam poſitionem ſuarum ordinatarum. Et hyperbola, ſubinde deſcripta, locus erit quæſitus. Quod ut palam fiat, ducatur ex puncto aliquo M ordinata ad diametrum MO, quæ occurrat ipſis AB, AD in N, & R; poſitiſque AN $= x$, & MN $= y$, erit, ob triangula æquiangula ACD, ANR, NR $= ax:c$, & AR, ſive FO $= sx:c$.

Hinc, quum ſit MR $= y - ax:c$, & AF, ſive RO $= b$; erit reliqua MO $= y - ax:c - b$.

$-b$. Eſt autem ex conſtructione FE $= bs:2a$. Quare erit tota EO $= sx:c + bs:2a$. Jam vero, propter hyperbolam, MO quadratum eſt ad differentiam quadratorum EO, EH, ut eſt HG ad HK. Itaque, quum habeatur, ut $yy - 2axy:c + aaxx:cc - 2by + 2abx:c + bb$ ad $ssxx:cc + 2bssx:2ac + bbss:4aa - ss:2 + bbss:4aa$, ita $2aa$ ad ss; erit $yy - 2axy:c + aaxx:cc - 2by + 2abx:c + bb = 2aaxx:cc + 2abx:c + bb:2 - aa + bb:2$, quæ reducta exhibebit æquationem propoſitam $yy - 2axy:c - aaxx:cc - 2by + aa = 0$.

XI. *Præcedentis exempli caſus omnes expenduntur.*

XI. In allato igitur exemplo, ut valor ſemidiametri t realis evadat, neceſſe eſt, ut $2aa$ major ſit, quam bb. Sed, ſi fuerit $2aa$ minor, quam bb, tunc ejuſdem ſemidiametri valor prodibit imaginarius. In iſto autem caſu, ut ſuperius innuimus, explicandus eſt locus per hyperbolas conjugatas, & fieri debet EH, vel EK $= \surd(bbss:4aa - ss:2)$. Nec difficile id erit oſtendere. FIG. 97.

Sumatur enim in altera hyperbolarum conjugatarum punctum aliquod M, ex quo ducatur ad diametrum HK ordinata MO, ipſi AB occurrens in N. Jamque, poſitis adhuc AN $= x$, & MN $= y$; erit MO $= y - ax:c - b$, & EO $= sx:c + bs:2a$. Sed in iſto caſu MO quadratum eſt ad ſummam quadratorum EO, EH, ut HG ad HK. Quare, quum ſit, ut $yy - 2ay:c + aaxx:cc - 2by + 2abx:c + bb$ ad $ssxx:cc + 2bssx:2ac + bbss:4aa + bbss:4aa - ss:2$, ita $2aa$ ad ss; erit $yy - 2axy:c + aaxx:cc - 2by + 2abx:c + bb = 2aaxx:cc + 2abx:c + bb - aa$, ſive etiam $yy -$

$2axy:c$

$2axy : c - aaxx : cc - 2by + aa = 0$.

Fieri etiam poteſt, ut ſit $2aa = bb$. Et tunc, evaneſcente valore ſemidiametri t, vertetur hyperbola in rectas duas, in centro E ſeſe mutuo ſecantes. Id vero ut oſtendamus, addatur utrique æquationis conſtruendæ parti communis quantitas $2aaxx : cc + 2abx : c + bb - aa$; & erit $yy - 2axy : c + aaxx : cc - 2by + 2abx : c + bb = 2aaxx : cc + 2abx : c + bb - aa$, ſive etiam $yy - 2axy : c + aaxx : cc - 2by + 2abx : c + bb = bbxx : cc + 2abx : c + aa$. Quare, per extractionem quadratæ radicis, fiet, tum $y - ax : c - b = bx : c + a$, cum $-y + ax : c + b = bx : c + a$: quæ duæ æquationes ad lineam rectam nos ducunt.

Et quidem, quod evaneſcente valore ſemidiametri t, hyperbola verti debeat in rectas duas, in centro ſeſe invicem ſecantes; id generaliter vidimus ſupra, ubi ſectionum conicarum ortum expoſuimus. Quod autem locus explicari debeat per hyperbolas conjugatas, quum ejuſdem ſemidiametri valor prodit imaginarius; id univerſaliter pendet ex eo, quod in hyperbolis conjugatis quadratum cujuſque ordinatæ proportione correſpondet, non quidem differentiæ, ſed ſummæ quadratorum, quæ fiunt ex ſemidiametro, & portione ejus, ordinata, & centro comprehenſa.

Hinc notetur hoc loco velim, quod ſi conſtruendus ſit locus aliquis ad hyperbolam, relate ad diametros conſideratam, per reductionem ejus ad formulam ſimpliciſſimam, & æquatio reducta formam induat,

non

non quidem iſtius $myy : n = xx - dd$, ſed alterius hujus $myy : n = xx + dd$; tunc ipſe locus per hyperbolas conjugatas poterit explicari; quum ſit, ut n ad m, ita quadratum ordinatæ y ad ſummam quadratorum, quæ fiunt ex ſemidiametro d, & portione x, centro & ordinata comprehenſa.

Neque vero mirum cenſeri debet, quod id ſuperius a nobis non fuerit adnotatum. Si enim reductæ æquationis $myy : n = xx + dd$ termini omnes multiplicentur per n, iidemque dividantur per m; fiet $yy = nxx : m + ndd : m$, ſive etiam $nxx : m = yy - ndd : m$, quæ proculdubio per hyperbolas principales debet explicari. Unde, per reductionem æquationis ad formulam ſimpliciſſimam, ſemper caſus vitari poteſt, qui ad hyperbolas conjugatas nos manuducit.

XII. *Quid in compoſitione locorum ad hyperbolam, relate ad diametros conſideratam, potiſſimum notari debeat.*

XII. Cæterum, *in compoſitione locorum ad hyperbolam, relate ad diametros conſideratam, illud etiam ſedulo notari debet*, quod exiſtentibus x, & y duabus conſtruendæ æquationis incognitis, fieri quandoque poſſit, ut deſignari debeant per portiones AN rectæ AB valores incognitæ y, perque rectas NM valores alterius incognitæ x. Nec ſane in utraque loca conſtruendi ratione difficile erit definire, quando demum id fieri debeat.

Nimirum, quum conſtruitur locus, per reductionem æquationis ad formulam ſimpliciſſimam, fieri id debet, quotieſcumque in æquatione reducta per fractionem aliquam multiplicatum reperitur quadratum, vel incognitæ x, vel ejus, quæ ex ipſa dependet.

Sic

Digitized by Google

Sic æquatio $mxx:n - 2mx + mn = yy + 2ay$ mutationem illam expoſcit. Nam, faciendo $x - n = z$, & $y + a = u$, habebitur loco ejus hæc alia $mzz: n = uu - aa$: ubi per fractionem $m : n$ reperitur multiplicatum quadratum incognitæ z, quæ dependet ex x; quum habeatur $x - n = z$.

Quotieſcumque vero conſtruitur locus, per reductionem æquationis ad formulam compoſitam, illud idem fieri debet, quando in æquatione conſtruenda quadratum incognitæ x ab omni fractione immune reperitur. Sic ſequens æquatio $xx - 2axy:c + aayy:2cc - 2ax - 2by + cc = o$ exigit quoque eam variationem, quia quadratum incognitæ x illud eſt, quod in ea omni fractione denudatum occurrit.

Interim, quum conſtruitur æquatio, per reductionem ad formulam compoſitam, eademque natura ſua mutationem illam expoſcit, neceſſe eſt, ut etiam in formula incognitæ varientur. Sic formula, cum qua comparanda eſt æquatio $xx - 2axy: c + aayy:2cc - 2ax - 2by + cc = o$, haud quidem eſſe debet $yy + 2mxy:n + mmxx:nn - pssxx:2tnn + 2qy + 2qmx : n - prsx : tn + qq + pt: 2 - prr: 2t = o$, ſed $xx + 2myx: n + mmyy: nn - pssyy: 2tnn + 2qx + 2qmy: n - prsy : tn + qq + pt: 2 - prr: 2t = o$.

Sed hic quoque, perinde ac in ellipſi, fatendum eſt, variationem iſtam non eſſe abſolute neceſſariam. Nam in priore exemplo, etſi per reductionem habeatur $mzz : n = uu - aa$; multiplicando tamen omnes æquatio-

nis

nis terminos per n, eoſdemque dividendo per m, fiet $zz = nuu : m - naa : m$, ſive etiam $nuu : m = zz + naa : m$: ubi per fractionem $n : m$ multiplicatum reperitur quadratum incognitæ u, quæ dependet ex y; qum habeatur $y + a = u$: licet ipſa æquatio explicari debeat per hyperbolas conjugatas.

Atque ita quoque in ſecundo exemplo, etſi æquatio ſit $xx - 2axy : c + aayy : 2cc - 2ax - 2by + cc = 0$; multiplicatis tamen terminis omnibus per $2cc$, iiſdemque diviſis per aa, habebitur $2ccxx : aa - 4cxy : a + yy - 4ccx : a - 4bccy : aa + 2c^4 : aa = 0$: ubi quadratum incognitæ y omni vacat fractione. Nec difficile erit intelligere, quod hoc idem præſtari poſſit in omnibus æquationibus, quæ ad hyperbolam, relate ad diametros conſideratam, nos manuducunt.

XIII. *Quomodo diſtinguenda ſint loca, quæ hyperbola æquilatera terminantur.*

XIII. Illud quoque nolim hic ſilentio præterire, quod ſicuti loca ad circulum referri debent ad illa, quæ ſunt ad ellipſim; ſic *inter loca ad hyperbolam ſpeciatim conſideranda ſint ea, quæ hyperbola æquilatera terminantur.* Innoteſcent autem hujuſmodi loca, quotieſcumque in eorum conſtructione oritur parameter æqualis diametro, ad quam refertur.

Proponatur, exempli gratia, conſtruenda æquatio $yy - 2ay + aa = xx - 2bx$, quæ ad hyperbolam, relate ad diametros conſideratam, nos ducit. Fiat, tum $y - a = z$, cum $x - b = u$. Et quoniam habetur $yy - 2ay + aa = zz$, & $xx - 2bx = uu - bb$; erit per ſubſtitutionem $zz = uu - bb$ æquatio reducta. Du-

Digitized by Google

Ducatur jam in ſubjecto plano recta quævis AB, & deſignentur per portiones ejus AN valores incognitæ x. Quumque in reductione habeatur $x - b = u$, abſcindatur ex AB portio AC $= b$. Et quoniam fit quælibet CN $= x - b$, deſignabunt portiones iſtæ CN valores incognitæ u. Fig. 98.

Sit deinde CD recta, cui eſſe debent æquidiſtantes ipſæ NM, quæ valores referunt alterius incognitæ y: Et quoniam in reductione habetur quoque $y - a = z$, abſcindatur ex CD portio CE $= a$; & ducta per punctum E recta EF, ipſi CA parallela, fiet quælibet OM $= y - a$; adeoque ipſæ OM valores referent incognitæ z.

Denique, quum æquatio reducta ſit $zz = uu - bb$, liquet, quod, ſi hinc inde a puncto E capiatur, tum EF, cum EG $= b$, debeat eſſe FG quæſitæ hyperbolæ diameter. Et quemadmodum, ducta FH, ipſi CD parallela, diametri ejus ordinatæ debent eſſe æquidiſtantes rectæ FH; ita ſi fiat, ut FH ſit ad FG in ratione æqualitatis, erit eadem FH parameter illius diametri.

In conſtructo igitur loco inventa eſt parameter FH æqualis diametro FG, ad quam refertur. Unde conſequens eſt, ut hyperbola, per quam locus terminatur, ſit æquilatera: adeo nempe, ut non modo diameter FG adæquet parametrum ſuam FH, ſed & omnes aliæ diametri parametris ſuis æquales eſſe debebunt.

Cæterum, quum hyperbola æquilatera circulo correſpondeat, quæri hic poteſt, cur

hy-

Digitized by Google

hyperbola fiat æquilatera,per ſolam æqualitatem parametri cum diametro, ad quam refertur; ſed non item ellipſis, quippe quæ ut in circulum abeat, requiritur quoque, ut ordinatæ rectos cum eadem diametro angulos conſtituant.

Pendet id igitur ex eo, quod in qualibet ellipſi binæ adſint conjugatæ diametri æquales, tam inter ſe, quam cum parametris ſuis. Unde ſola æqualitas parametri cum diametro efficere nequaquam poteſt, ut ellipſis vertatur in circulum; quum æqualitas illa etiam in ellipſi poſſit haberi.

C A P. VI.

De conſtructione locorum ad hyperbolam, relate ad aſymptotos conſideratam.

I. Locorum ad hyperbolam, relate ad aſymptotos conſideratam, formula ſimpliciſſima exhibetur.

I. Tradita conſtructione locorum ad hyperbolam, relate ad diametros conſideratam; oſtendemus modo, qua ratione conſtruenda ſint loca illa, in quibus hyperbola ſub contemplatioem venit relate ad aſymptotos. Et ut ab ea methodo ordiamur, quæ formulam adhibet, caſum omnium ſimpliciſſimum continentem, ſciendum eſt, quod in hyperbola, relate ad aſymptotos conſiderata,caſus ſimpliciſſimus habeatur, quum *ejus puncta omnia ad aliquam ipſius aſymptotum referuntur per rectas, quæ ſint aſymptoto alteri parallelæ.* Sit

Sit ergo A centrum hyperbolæ, ſintque etiam AB, AC duæ ejus aſymptoti. Capiatur in hyperbola punctum aliquod M, ex quo demittatur ad aſymptotum AB recta MN, aſymptoto alteri AC parallela. Tum ponatur AN $= x$, & MN $= y$. Jamque, ob naturam hyperbolæ, rectangulum ANM eſt ejuſdem ubique magnitudinis. Quare, ſi quantitas ejus vocetur aa, erit hyperbolæ localis æquatio $xy = aa$. Unde ſemper ac æquatio aliqua ad iſtiuſmodi formam reduci poterit; tunc ea ad hyperbolam, relate ad aſymptotos conſideratam, proculdubio nos manuducet. FIG. 99.

Sed notetur hoc loco velim, quod etſi punctum M capiatur in hyperbola oppoſita, adhuc tamen æquatio localis hyperbolæ ſit $xy = aa$. Nam, licet in hoc caſu habeatur, tam AN $= - x$, quam MN $= - y$; nihilominus rectangulum ANM ſemper per xy exprimi debet; quum notum ſit ex Algebræ Elementis, poſitivum eſſe productum, quod oritur ex multiplicatione duarum quantitatum negativarum.

Notatu etiam hic dignum exiſtimo, quantitatem cujuſque rectanguli ANM, per aa a nobis deſignatam, vocari communiter *potentiam* hyperbolæ; nec aliter, datis aſymptotis, hyperbolam definiri, quam data etiam ejus potentia. Qua autem ratione hyperbola in plano deſcribi poſſit, ubi una cum ejus aſymptotis data eſt quoque ejuſdem potentia; id quidem inferius oſtendemus.

II. Neque vero difficile erit definire, II. *Quæ æqua-*

qua-

tiones ad formulam illam ſimpliciſſimam ſunt reducibiles.

qualis eſſe debeat æquatio, quæ ſubinde reduci poſſit, ut formam induat iſtius $xy = aa$. Primo enim, quemadmodum in formula incognitæ duæ ſimul multiplicatæ reperiuntur; ſic etiam non poterit æquatio aliqua ad eam formulam revocari, niſi contineat productum duarum incognitarum.

Sed productum iſtud neceſſe eſt quoque, ut vel cum nullo earundem incognitarum quadrato, vel cum uno tantum conjungatur: adeo nempe, ut ſi ambo fuerint in æquatione quadrata incognitarum, locus nunquam erit ad hyperbolam, relate ad ſuas aſymptotos conſideratam; ſed, per regulas ſuperius traditas, erit, vel ad hyperbolam, conſideratam relate ad diametros, vel ad ellipſim, vel etiam ad parabolam.

Proponatur, exempli gratia, æquatio $xy - ax - by - ac = o$, ubi productum incognitarum cum nullo earum quadrato conjungitur. Fiat $y - a = z$, ſive etiam $y = z + a$; & erit per ſubſtitutionem $xz + ax - ax - bz - ab - ac = o$, ſive etiam $xz - bz - ab - ac = o$. Fiat quoque $x - b = u$, ita ut ſit $xz - bz = uz$; & erit rurſus ope ſubſtitutionis $uz - ab - ac = o$. Fiat demum $ab + ac = ff$; & erit $uz - ff = o$, ſive etiam $uz = ff$ æquatio reducta.

Proponatur etiam æquatio $ax - xx + xy + by - ac = o$, ubi productum incognitarum cum uno tantum earum quadrato conjungitur. Capiatur $x + b = u$; ſive etiam $x = u - b$. Et ponendo ubique $u - b$ loco x, & $uu - 2bu + bb$ loco xx; erit $au - uu +$

2bu

$2bu + uy - ab - bb - ac = o$. Capiatur quoque $a - u + 2b + y = z$, ita ut ſit $au - uu + 2bu + uy = uz$; & erit per ſubſtitutionem $uz - ab - bb - ac = o$. Unde, ponendo demum $ab + bb + ac = ff$, ſiet $uz - ff = o$, ſive etiam $uz = ff$ æquatio reducta.

III. Sed exemplis modo oſtendamus, *qua ratione, per reductionem æquationis ad formulam ſimpliciſſimam, loca ad hyperbolam, relate ad aſymptotos conſideratam, conſtruantur*. Primo itaque proponatur conſtruenda æquatio $xy - ax - by - ac = o$, quæ, ut paulo ante oſtenſum eſt, reducitur ad $uz = ff$, ponendo $y - a = z$, $x - b = u$, & $ab + ac = ff$. III. *Oſtenditur exemplis conſtructio horum locorum per formulam ſimpliciſſimam. Exemplum primum.*

Ducatur in ſubjecto plano recta quævis AB, ex qua abſcindatur portio AC $= b$. Jamque, ſi deſignentur per portiones AN ipſius AB valores incognitæ x, fiet unaquæque reliquarum portionum CN $= x - b$; adeoque, quum habeatur $x - b = u$, ipſæ CN deſignabunt valores incognitæ u. FIG. 100.

Sit deinde CD recta, cui eſſe debent æquidiſtantes ipſæ NM, quæ valores referunt alterius incognitæ y. Et quoniam in reductione habetur $y - a = z$, abſcindatur ex CD portio CE $= a$; & ducta per punctum E recta EF, ipſi CA parallela, fiet quælibet OM $= y - a$; atque adeo ipſæ OM valores referent incognitæ z.

Denique, quum æquatio reducta ſit $uz = ff$, liquet, debere eſſe punctum E centrum deſcribendæ hyperbolæ, & rectas ED, EF aſymptotos ejus. Deſcribatur ergo hyperbola iſta, ſed ita tamen, ut ſit ff potentia ejus,

Digitized by Google

& eadem erit terminus loci propoſiti.

IV. *Demonſtratio conſtructionis præcedentis exempli in medium affertur.*

IV. Ut autem oſtendere poſſimus, *hyperbolam iſtam eſſe lineam, ad quam refertur æquatio* $xy - ax - by - ac = 0$, juvat prius advertere, quod ſi ſuper AB capiatur ad partem oppoſitam portio $AG = c$, hyperbola quidem principalis nullimode ſecet rectam AB, ejus autem oppoſita tranſire debeat per punctum G. Nam in æquatione, de qua agitur, ſi ponatur $y = 0$, habebitur $- ax - ac = 0$, unde infertur $x = - c$.

Fig. 100.

Id quum ita ſit, capiatur primo in hyperbola principali punctum aliquod M, ex quo demittatur ad aſymptotum EF recta MO, ipſi ED parallela, conveniens cum AB in N. Jamque, poſitis $AN = x$, & $MN = y$; erit ex conſtructione CN, ſive $EO = x - b$, $OM = y - a$, & rectangulum $EOM = xy - ax - by + ab$. Unde, quum ſit ff, ſive etiam $ab + ac$ potentia hyperbolæ; erit $xy - ax - by + ab = ab + ac$, ſive etiam $xy - ax - by - ac = 0$, quæ eſt æquatio conſtruenda.

Ducantur nunc ex punctis A, & G in hyperbola oppoſita rectæ AH, GK, ipſi ED parallelæ. Tum capiatur ſecundo punctum aliquod M in portione HX ipſius hyperbolæ oppoſitæ, ex quo demittatur pariter ad aſymptotum EF recta MO, eidem ED parallela, conveniens cum AB in N. Et quamquam in iſto caſu maneat $AN = x$, fiet tamen CN, ſive $EO = b - x$. Quumque hic poni debeat $MN = - y$; erit $MO = - y + a$: proindeque, ob naturam hyperbolæ, rurſus erit ut antea $xy - ax - by - ac = 0$.

Ca-

Digitized by Google

Capiatur tertio in portione hyperbolæ oppoſitæ HK punctum quodvis M, ex quo etiam ducatur ad aſymptotum EF recta MO, alteri ED parallela, conveniens cum AB in N. Patetque, in iſto caſu fieri, tum $AN = -x$, cum $MN = -y$; adeoque eſſe, ut in caſu præcedenti, CN, ſive $EO = b - x$, & $MO = -y + a$. Quare, ob hyperbolæ naturam, invenietur ſemper æquatio $xy - ax - by - ac = 0$.

Capiatur denique punctum M in portione reliqua KZ hyperbolæ oppoſitæ, ex quo ſimiliter demittatur ad aſymptotum EF recta MO, alteri ED parallela, conveniens cum AB in N. Et quoniam in iſto caſu fit $AN = -x$, & $MN = y$; adhuc erit CN, ſive $EO = b - x$, & $MO = -y + a$. Unde, ob naturam hyperbolæ, ſemper habebitur æquatio $xy - ax - by - ac = 0$.

V. Proponatur ſecundo *conſtruenda æquatio altera, ſuperius allata*, $ax - xx + xy + by - ac = 0$, quæ, ut ibidem oſtenſum eſt, reducitur ad $uz = ff$, ponendo $x + b = u$, $a - u + 2b + y = z$, & $ab + bb + ac = ff$. *V. Exemplum ſecundum, caſum exhibens paulo difficiliorem.* FIG. 101.

Ducatur in ſubjecto plano recta quævis AB, & per portiones ejus AN deſignentur valores incognitæ x. Quumque habeatur $x + b = u$, capiatur ſuper AB ad plagam oppoſitam portio $AC = b$. Et quoniam fit quælibet $CN = x + b$, deſignabunt portiones CN valores incognitæ u.

Sit deinde CD recta, cui eſſe debent æquidiſtantes ipſæ NM, quæ valores referunt alterius incognitæ y. Et quoniam in redu-

Digitized by Google

ctione habetur $a - u + 2b + y = z$, ſive etiam $y + a + b - x = z$; capiatur ſuper CD ad partem contrariam, tum portio CE $= a + b$, cum portio EF æqualis ipſi AC. Jamque, completo parallelogrammo AE, ductaque FG, ipſis NM occurrente in O, fiet unaquæque OM $= y + a + b - x$; adeoque ipſæ OM valores referent incognitæ z.

Quoniam autem rectæ iſtæ OM correſpondent portionibus ipſius FG; utique erit F centrum deſcribendæ hyperbolæ, tum item FG, FD erunt aſymptoti ejus. Verum portiones illæ FO tunc demum reperiuntur æquales ipſis CN, ubi æquales ſunt duæ AC, FG. Unde procul eſt, ut eædem FO deſignare queant valores incognitæ u; adeoque, etſi æquatio reducta ſit $uz = ff$, multum tamen abeſt, ut ſit ff quæſitæ hyperbolæ potentia.

Itaque, ut definiamus potentiam deſcribendæ hyperbolæ, ſit AC ad FG, ut eſt n ad m. Quumque hac ratione fiat quælibet FO $= mu : n$, ſi ponamus ulterius, quod quæſita potentia ſit gg, erit ejuſdem hyperbolæ localis æquatio $muz : n = gg$, ſive etiam $uz = ngg : m$. Erat autem $uz = ff$. Quare, inſtituta comparatione, fiet $ngg : m = ff$. Unde infertur $gg = mff : n$; adeoque potentia hyperbolæ deſcribendæ debet eſſe $mff : n$.

VI. *Veritas conſtructionis præcedentis exempli demonſtratur.* Fig. 101.

VI. Hic etiam, ut oſtendere poſſimus, *hujuſmodi hyperbolam ſatisfacere propoſitæ æquationi* $ax - xx + xy + by - ac = 0$, juvat prius advertere, quod ſi ex AB abſcindatur portio AH $= a : 2$, & hinc inde a puncto H capiatur, tum HK, cum HL $= \sqrt{(aa : 4 - ac)}$,

$ac)$, hyperbola quidem principalis tranſire debeat per puncta K, & L; ejus autem oppoſita nullimode ſecet rectam AB. Nam in æquatione, de qua agitur, ſi ponatur $y = o$, fiet $ax - xx - ac = o$, unde infertur, tum $x = a:2 + \surd(aa:4 - ac)$, cum $x = a:2 - \surd(aa:4 - ac)$.

Id quum ita ſit, extendatur AG uſque donec hyperbolam principalem ſecet in I, & capiatur in portione ejus IL, aut KX punctum aliquod M, ex quo demittatur ad aſymptotum FG recta MO, alteri FD parallela, conveniens cum AB in N. Jamque, poſitis $AN = x$, & $MN = y$; erit ex conſtructione $CN = x + b$, & $MO = y + a + b - x$. Sed CN eſt ad FO, ut AC ad FG, ſive etiam, ut n ad m. Quare erit $FO = mx:n + mb:n$.

Hinc erit rectangulum $FOM = mxy:n + max:n + mbx:n - mxx:n + mby:n + mab:n + mbb:n - mbx:n$. Sed, ob naturam hyperbolæ, quantitas ejuſdem rectanguli eſt $mff:n$. Quare erit $mxy:n + max:n + mbx:n - mxx:n + mby:n + mab:n + mbb:n - mbx:n = mff:n$, ſive etiam $xy + ax + bx - xx + by + ab + bb - bx = ff$, quæ, translatis terminis omnibus ad eandem partem, & poſito loco ff valore ejus $ab + bb + ac$, reducitur ad $xy + ax - xx + by - ac = o$.

Capiatur ſecundo in portione hyperbolæ principalis KL punctum aliquod M, ex quo etiam demittatur ad aſymptotum FG recta MO, alteri FD parallela, conveniens cum AB in N. Et quoniam in iſto caſu fit $AN = x$, & $MN = -y$; erit adhuc $CN = x + b$, $FO = mx:n + mb:n$, & $MO = y$

$+ a + b - x$. Unde, ob hyperbolæ naturam, rurſus erit ut antea $xy + ax - xx + by - ac = o$.

Capiatur tertio in portione reliqua hyperbolæ principalis IZ punctum quodvis M, ex quo ducatur pariter ad aſymptotum FG recta MO, alteri FD parallela, conveniens cum AB in N. Patetque, in hoc caſu fieri $AN = - x$, & $MN = y$. Hinc erit ſemper $CN = x + b$, $FO = mx:n + mb:n$, & $MO = y + a + b - x$, Quare, ob naturam hyperbolæ, habebitur ſemper æquatio $xy + ax - xx + by - ac = o$.

Capiatur demum in hyperbola oppoſita punctum quodvis M, ex quo ſimiliter ducatur ad aſymptotum FG recta MO, alteri FD parallela, quæ conveniat cum AB in N. Quumque in iſto caſu fiat, tum $AN = - x$. cum $MN = - y$; erit adhuc $CN = x + b$, $FO = mx:n + mb:n$, & $MO = y + a + b - x$: proindeque, ob hyperbolæ naturam, adhuc habebitur eadem æquatio $xy + ax - xx + by - ac = o$.

Fieri autem poteſt, ut puncta duo H, & K coeant in unum, & ipſa AB hyperbolæ tangens evadat: nimirum, quum habetur $a = 4c$; quandoquidem in hoc caſu radices duæ æquationis $ax - xx - ac = o$ fiunt æquales inter ſe. Sed contingere quoque poteſt, ut recta AB nec ſecet, nec tangat hyperbolam: ſcilicet, ſi a minor ſit, quam $4c$; quum in iſto caſu ejuſdem æquationis radices duæ evadant imaginariæ.

VII. *Locorum ad* VII. Atque ita quidem conſtruuntur lo-

loca ad hyperbolam, relate ad aſymptotos conſideratam, per reductionem ſuarum æquationum ad formulam ſimpliciſſimam. Videamus itaque modo, *qua ratione eadem loca ad hyperbolam conſtrui debeant, reducendo eorum æquationes ad formulam, quæ ſit omnium maxime compoſita*. Quem in finem, qualis ſit iſtiuſmodi formula, operæ pretium eſt, ut primo loco definiamus.

hyperbolam, relate ad aſymptotos conſideratam, formula generalis exhibetur.

Nimirum, referendo hyperbolæ puncta omnia ad rectam poſitione datam, per rectas alias, quæ ſint uni ex aſymptotis parallelæ; perſpicuum eſt, tria contingere poſſe. Primo, ut recta poſitione data ſit aſymptotus altera. Secundo, ut ſit aliqua ejus parallela. Et tertio demum, ut angulum cum eadem aſymptoto conſtituat. Unde, ſicuti ex tribus hiſce caſibus priores duo ſub tertio continentur; ita & formula hyperbolæ, relate ad aſymptotos conſideratæ, omnium maxime compoſita, ea erit, quæ ex tertio illo caſu deducitur.

Sit igitur E centrum hyperbolæ; ſintque etiam EH, EK binæ ejus aſymptoti. Agatur recta AD, aſymptoto EH parallela; & per aliquod ejus punctum A ducatur quoque obliqua AB. Sumatur poſtea in AB punctum quodvis C; & ductis rectis AF, CD, aſymptoto alteri EK æquidiſtantibus, ponatur $AC = n$, $CD = m$, $AD = s$, $AF = q$, & $EF = r$. FIG. 102.

Capiatur nunc in hyperbola punctum aliquod M, ex quo demittatur ad aſymptotum EH recta MO, alteri EK parallela, con-

Digitized by Google

veniens cum AB in N, & cum AD in R ; ponaturque adhuc AN $= x$, & NM $= y$. Quia ergo AN eſt ad NR, ut AC ad CD; erit NR $= mx : n$; adeoque, quum duæ AF, RO inter ſe ſint æquales, erit MO $= y + mx : n + q$. Et quoniam AN eſt ad AR, ut AC ad AD; erit AR, ſive FO $= sx : n$: proindeque erit EO $= r + sx : n$.

Hinc erit rectangulum EOM $= ry + mrx : n + rq + sxy : n + msxx : nn + sqx : n$; adeoque, ſi potentia hyperbolæ vocetur pp, habebitur, ob naturam ejuſdem hyperbolæ, $ry + mrx : n + rq + sxy : n + msxx : nn + sqx : n = pp$, ſive etiam $xy + mxx : n + nry : s + mrx : s + qx + nrq : s - npp : s = o$: & propterea formulam hyperbolæ, relate ad aſymptotos conſideratæ, omnium maxime compoſitam, comperta æquatio nobis exhibebit.

Perſpicuum eſt autem, in hujuſmodi formula productum duarum incognitarum xy cum uno tantum earum quadrato conjungi ; nec quidquam obſtare, quin quadratum illud ab ipſa formula deficiat: nimirum, ſi fuerit $m = o$. Unde veritas regulæ, ſuperius traditæ, pro cognoſcendis locis ad hyperbolam, relate ad ſuas aſymptotos conſideratam, ex ipſa eorum formula generali prono alveo fluit.

VIII. *Quomodo per inventam formulam generalem præfata loca conſtruantur.*

VIII. Sed oſtendamus modo, *quo pacto, ope inventæ formulæ generalis, conſtruantur loca ad hyperbolam, relate ad ejus aſymptotos conſideratam*. Nimirum, comparationis ope definiendæ ſunt primum quantitates, quæ locum determinant. Et ſiquidem omnes in-

veniun-

veniuntur poſitivæ, danda eſt rectis, quas referunt, illa eadem poſitio, quam in figura formulæ reperiuntur habere. Sed ſi earum aliqua prodit negativa; tunc recta, quam exhibet, capienda eſt ad plagam oppoſitam.

Quantitates porro, quæ locum determinant, ſunt *m*, *n*, *pp*, *q*, *r*, *s*. Verum, inſtituta comparatione, dumtaxat ipſarum *pp*, *q*, *r* valores innoteſcunt. Et, quantum ad priores duas *m*, & *n*, nonniſi ratio, quam habent inter ſe, cognita fiet. Hinc valor unius ex iis ſumi poterit ad libitum. Et tunc, per cognitam rationem, quam inter ſe habent, etiam valor alterius notus evadet. Præſtat autem, utcumque aſſumere valorem ipſius *n*, quem tamen poſitivum ſemper eſſe oportebit.

Determinatis valoribus ipſarum *m*, & *n*, etiam quantitatis *s* valor innoteſcet. In triangulo enim CAD notus eſt angulus ACD, velut æqualis angulo ANM, qui vel datus eſt, vel ſumitur ad libitum. Quare, ubi duo ejus latera AC, CD, deſignata per quantitates *n*, & *m*, ſimiliter nota ſunt; cognoſcemus quoque tertium latus AD, quod exhibet quantitas *s*. Speciatim autem erit $s = n$, ubi valor ipſius *m* nullus reperitur; quandoquidem, evaneſcente CD, cadit AB ſuper AD, & puncta duo C, & D coeunt in unum. FIG. 102.

Illud quoque ſedulo hic notandum exiſtimo, quod ubi valor ipſius *pp*, quæ hyperbolæ potentiam refert, prodit negativus; tunc ipſa hyperbola deſcribenda ſit ad partem alteram aſymptoti EH. Nec obſcura eſt hujus rei ratio. Nam negatio illa, non tam afficit

cit hyperbolæ potentiam, quam rectangulum EOM, cui potentia illa eſt æqualis. Unde, quum ordinata OM capienda ſit ad partem contrariam; omnino neceſſe eſt, ut hyperbola deſcribatur ad partem alteram ipſius EH

IX. *Exemplum primum, caſum exhibens ſimpliciorem.*

IX. Oporteat itaque primo; *conſtruere æquationem* $xy - ax - by - ac = 0$, *quæ locum exhibet ad hyperbolam; relate ad aſymptotos conſideratam*. Quia in ea deeſt quadratum xx; utique fractio $m : n$, per quam illud in formula multiplicatum reperitur, debet eſſe nihilo æqualis. Unde, quum ſit $m = 0$; per ea, quæ paulo ante notata ſunt, erit quoque $n = s$; adeoque ipſa formula fiet $xy + ry + qx + rq - pp = 0$.

Jam, inſtituta comparatione habebitur, $q = -a$, $r = -b$, & $rq - pp = -ac$. Unde, quemadmodum $-a$, $-b$ ſunt valores ipſarum q, & r; ita, ſubſtitutis valoribus hiſce in tertia æquatione, fiet $ab - pp = -ac$, hoc eſt $pp = ab + ac$: proindeque, deſignatis valoribus incognitæ x per portiones AN rectæ AB; & exiſtente AL recta, cui æquidiſtantes eſſe debent valores alterius incognitæ y, conſtruetur propoſita æquatio in eum, qui ſequitur, modum.

FIG. 103.

Abſcindatur ex AL portio AF $= a$. Tum, ducta FK, ipſi AB parallela, capiatur ſuper ea portio FE $= b$. Ducatur porro per punctum E recta EK, æquidiſtans ipſi AL. Denique centro E, & aſymptotis EH, EK deſcribatur hyperbola talis, ut ejus potentia ſit $ab + ac$. Et hyperbola, ſubinde deſcripta, locus erit quæſitus.

Du-

Digitized by Google

Ducatur enim ex puncto aliquo M ad aſymptotum EH recta MO, alteri EK parallela, conveniens cum AB in N. Et, poſitis AN, ſive FO $= x$, & MN $= y$; erit ex conſtructione MO $= y - a$, EO $= x - b$, & rectangulum EOM $= xy - ax - by + ab$. Eſt autem hyperbolæ potentia $ab + ac$. Quare erit $xy - ax - by + ab = ab + ac$, ſive etiam $xy - ax - by - ac = o$, quæ eſt æquatio conſtruenda.

X. Oporteat etiam, *conſtruere æquationem* $xy + ay + bx - axx : c + ac = o$, *quæ ſimiliter locum exhibet ad hyperbolam, relate ad ejus aſymptotos conſideratam*. Quia hic adeſt quadratum xx; inſtituta comparatione, habebitur primo $m : n = - a : c$. Quare, aſſumpta $n = c$, fiet $m = - a$. Comparatis autem terminis reliquis, habebitur quoque $nr : s = a$, $mr : s + q = b$, & $nrq : s - npp : s = ac$.

X. *Exemplum ſecundum, caſum maxime compoſitum continens.*

Hinc in prima harum æquationum, ſubrogato valore ipſius n, fiet $cr : s = a$, ſive etiam $r = as : c$. Et quoniam ex ſecunda æquatione eruitur $q = b - mr : s$; per ſubſtitutionem fiet quoque $q = b + aa : c$. Quumque demum per tertiam habeatur $pp = rq - acs : n$; ſubſtitutionis ope fiet etiam $pp = abs : c + a^3 s : cc - as$: adeo nempe, ut niſi ſit $bc + aa$ major, quam cc, valor ipſius pp prodibit, vel nullus, vel negativus.

Ponamus ergo, $bc + aa$ majorem eſſe, quam cc. Et, deſignatis valoribus incognitæ x per portiones AN rectæ AB, ſit AL ea, cui æquidiſtantes eſſe debent valores al- FIG. 104.

te-

terius incognitæ y. Capiatur in AB portio AC $= c$. Tum, ducta CD, ipſi AL parallela, fiat eadem CD $= a$, jungaturque AD. Capiatur deinde ſuper AL ad partem oppoſitam portio AF $= b + aa : c$, perque punctum F agatur recta EH, parallela ipſi AD. Fiat poſtea FE $= as : c$, & ducatur per punctum E recta EK æquidiſtans rectæ AL.

Denique centro E, & aſymptotis EH, EK deſcribatur hyperbola, quæ habeat pro ſua potentia quantitatem $abs : c + a^3 s : cc - as$. Et hyperbola, ſubinde deſcripta, locus erit quæſitus. Quod ut palam fiat, ducatur ex puncto aliquo M ad aſymptotum EH recta MO, alteri EK parallela, quæ occurrat ipſis AB, AD in punctis N, & R; poſitiſque AN $= x$, & MN $= y$, erit ob triangula æquiangula ACD, ANR, NR $= ax : c$, & AR, ſive FO $= sx : c$.

Hinc, quum ſit MR $= y - ax : c$, & AF, ſive RO $= b + aa : c$; erit tota MO $= y - ax : c + b + aa : c$. Eſt autem ex conſtructione FE $= as : c$. Quare erit tota EO $= sx : c + as : c$; atque adeo erit rectangulum EOM $= sxy : c - asxx : cc + bsx : c + aasx : cc + asy : c - aasx : cc + abs : c + a^3 s : cc$. Eſt autem $abs : c + a^3 s : cc - as$ hyperbolæ potentia. Itaque erit $sxy : c - asxx : cc + bsx : c + aasx : cc + asy : c - aasx : cc + abs : c + a^3 s : cc = abs : c + a^3 s : cc - as$, quæ reducta exhibebit æquationem propoſitam $xy - axx : c + bx + ay + ac = o$.

XI. Præcedentis exempli ca- XI. In allato igitur exemplo, ut valor potentiæ pp poſitivus evadat, neceſſe eſt, ut

ut $bc + aa$ major ſit, quam cc. Sed, ſi fuerit $bc + aa$ minor, quam cc; tunc ejuſdem potentiæ valor prodibit negativus. In iſto autem caſu, ut ſuperius innuimus, deſcribenda eſt hyperbola ad partem alteram aſymptoti EH, & eſſe debet $as - abs:c - a^3s:cc$ potentia ejus. Nec difficile id erit oſtendere. FIG. 105.

ſus omne. expenduntur.

Nam, ducta adhuc ex aliquo hyperbolæ puncto M ad aſymptotum EH recta MO, alteri EK parallela, quæ conveniat cum AB in N, & cum AD in R; poni debet AN $= x$, & MN $= -y$. Unde, quum fiat EO $= sx:c + as:c$, & MO $= -y + ax:c - b - aa:c$; erit rectangulum EOM $= -sxy:c + asxx:cc - bsx:c - aasx:cc - asy:c + aasx:cc - abs:c - a^3s:cc$; adeoque, ob naturam hyperbolæ, erit $-sxy:c + asxx:cc - bsx:c - aasx:cc - asy:c + aasx:cc - abs:c - a^3s:cc = as - abs:c - a^3s:cc$, unde eruitur æquatio conſtruenda $xy - axx:c + bx + ay + ac = 0$.

Fieri etiam poteſt, ut ſit $bc + aa = cc$. Et tunc, evaneſcente hyperbolæ potentia, cum ſuis aſymptotis hyperbola ipſa confundetur. Id vero ut oſtendamus, ponatur in æquatione conſtruenda loco b valor ejus $c - aa:c$; & erit $xy - axx:c + cx - aax:c + ay + ac = 0$. Quumque æquatio iſta dividi poſſit per binomium $x + a$, & ex diviſione oriatur quotiens $y - ax:c + c$; liquet, eandem componi ex duabus hiſce æquationibus primi gradus $y - ax:c + c = 0$, & $x + a = 0$.

Jam primæ harum æquationum fit ſatis per aſymptotum EH. Manentibus enim omni- FIG. 104.

Digitized by Google

nibus, ut ſupra, invenitur ſemper NR $= ax:c$. Unde, quum ſit AF, ſive RO $= b + aa:c = c$; erit NO $= c - ax : c$: proindeque, poſita eadem NO $= - y$, erit $c - ax : c = - y$, ſive etiam $y - ax : c + c = o$. Quod vero ſecundæ ſatisfaciat aſymptotus altera EK; id liquet ex eo, quod, producta BA, uſque donec ſecet EK in G, fiat AG $= a$.

XII. *Quid in compoſitione locorum ad hyperbolam, relate ad aſymptotos conſideratam, potiſſimum notari debeat.*

XII. Cæterum, *in compoſitione locorum ad hyperbolam, relate ad aſymptotos conſideratam, illud pariter ſedulo notari debet*, quod exiſtentibus x, & y duabus conſtruendæ æquationis incognitis, fieri quandoque poſſit, ut deſignari debeant per portiones AN rectæ AB valores incognitæ y, perque rectas NM valores alterius incognitæ x. Nec ſane difficile erit definire, quando demum id fieri debeat.

Nimirum id fiat oportet, quotieſcumque in æquatione propoſita una cum producto duarum incognitarum reperitur quadratum incognitæ y. Sic æquatio $xy + yy - ay - ac = o$ mutationem illam expoſcit, quia quadratum incognitæ y illud eſt, quod in ea conjungitur cum producto ambarum incognitarum xy.

Interim, quum conſtruitur æquatio aliqua, per reductionem ejus ad formulam compoſitam, eademque natura ſua exigit eam variationem, neceſſe eſt, ut etiam in formula incognitæ varientur. Sic formula, cum qua comparanda eſt æquatio $xy + yy - ay - ac = o$, haud quidem eſſe debet $xy + mxx : n + nry : s + mrx : s + qx + nrq : s - npp : s$

$npp:s=0$, ſed $xy+myy:n+nrx:s+mry:s+qy+nrq:s-npp:s=0$,

Eſſe autem omnino neceſſariam variationem iſtam, quum conſtruitur locus, per reductionem æquationis ad formulam compoſitam; id liquet abunde. Sed eadem neceſſitas non ita liquido apparet, quum conſtructio fit, per reductionem æquationis ad formulam ſimpliciſſimam. Quare, ut ea innoteſcat, fiat in allato exemplo $x+y-a=u$, ita ut ſit $xy+yy-ay=uy$. Et erit $uy-ac=0$, ſive etiam $uy=ac$ æquatio reducta.

Deſignentur jam valores incognitæ x per portiones AN rectæ AB. Et quoniam in reductione habetur $x+y-a=u$; liquet, non aliter haberi poſſe valores incognitæ u, quam delendo ex eis conſtantem a, & addendo iiſdem variabilem y. Id ergo quum fieri nullo pacto poſſit; hinc eſt, ut per portiones AN rectæ AB deſignandi ſint valores incognitæ y.

XIII. *Quod adſint quædam loca, quæ utraque ratione poſſunt per hyperbolam explicari.*

XIII. Illud quoque *nolim hic ſilentio præterire*, quod quotieſcumque in æquatione, una cum producto incognitarum, reperitur quadratum unius ex iis, tunc locus explicari poſſit, non modo per hyperbolam, relate ad eius aſymptotos conſideratam, verum etiam per hyperbolam, conſideratam in ordine ad ſuas diametros; quum ad utriuſque formulam poſſit æquatio ipſa revocari.

Proponatur, exempli gratia, conſtruenda æquatio $yy+2xy-2ay+2cx+aa=0$. Fiat $y+x-a=z$. Et quoniam habetur $yy+2xy-2ay+aa=zz-xx+2ax$;

ſub-

ſubſtitutione peracta, erit $zz - xx + 2ax + 2cx = 0$. Fiat quoque $x - a - c = u$. Quumque habeatur $2ax + 2cx - xx = aa + 2ac + cc - uu$; erit rurſus per ſubſtitutionem $zz + aa + 2ac + cc - uu = 0$. Ponatur porro $a + c = f$, ita ut ſit $aa + 2ac + cc = ff$; & habebitur demum $zz + ff - uu = 0$, ſive etiam $zz = uu - ff$, quæ ad hyperbolam, relate ad diametros conſideratam, nos ducit.

Id vero mirum cenſeri non debet. Jam enim vidimus ſupra, quod ubi in æquatione incognitæ duæ ſimul multiplicatæ reperiuntur, locus non aliter eſſe poſſit ad hyperbolam, conſideratam in ordine ad ſuas diametros, quam quum quadrata earundem incognitarum ita quidem in æquatione continentur, ut translatis ad eandem partem, tum terminis quadrata illa continentibus, cum termino incognitarum productum includente, debeat coefficiens unius quadrati augeri nonnihil, quo termini ii poſſint ſimul quadratum perfectum conſtituere.

Profecto autem, quotieſcumque in æquatione cum producto incognitarum conjungitur quadratum unius ex iis; tunc nihil vetat, alterius quoque quadratum in ea conſiderare; quum ſatis ſit, ei præfigere zero, ſeu nihilum, velut coefficientem. Unde, quia coefficiens iſtius quadrati debet augeri nonnihil, quo idem poſſit una cum quadrato alio, & producto incognitarum quadratum perfectum conſtituere; poterit conſideratione illa per hyperbolam, relate ad diametros conſideratam, æquatio ipſa explicari.

XIV.

Digitized by Google

XIV. Supereſt jam, ut oſtendamus, *qua ratione hyperbola in plano deſcribi poſſit, datis ejus aſymptotis, & potentia*. Sint igitur AB, AC aſymptoti hyperbolæ deſcribendæ; & exponatur potentia ejus per rectangulum, quod fit ex duabus earum portionibus AD, AE. Compleatur parallelogrammum AF. Et quoniam rectangulum ADF adæquat potentiam datam; erit punctum F in hyperbola quæſita.

XIV. *Quomodo deſcribi poſſit hyperbola in plano, datis ejus aſymptotis, & potentia.*

FIG. 106.

Quum autem punctum A ſit centrum hyperbolæ, ſi extendatur AF ad partem oppoſitam, uſque donec æquales ſint duæ AF, AG; fiet tota FG una ex diametris hyperbolæ. Et quoniam, conſtituta AB dupla ipſius AD, ductaque per punctum F recta BC, contingit iſta hyperbolam deſcribendam in F; deſignabit eadem BC poſitionem ordinatarum diametri FG. Unde quæſita hyperbola nullo negotio deſcribetur, ſi ejuſdem diametri poſſit etiam parameter definiri.

Ad hanc vero definiendam, meminiſſe oportet, quod eadem recta BC ſit æqualis conjugatæ ipſius FG. Hinc enim ſequitur, parametrum diametri FG debere eſſe tertio loco proportionalem poſt duas FG, BC; adeoque eandem haberi, ſi fiat, ut FG ad BC, ita BC ad FH. Deſcribatur ergo diametro FG hyperbola, ita ut recta FH exhibeat, tam parametrum ejus diametri, quam poſitionem ſuarum ordinatarum. Et hyperbola, ſubinde deſcripta, eam, quam quærimus, nobis exhibebit.

Obiter autem notetur hoc loco velim,

Digitized by Google

quod ſicuti, datis aſymptotis, & potentia, poſitione datur hyperbola ipſa; ſic dabitur quoque, ſi una cum aſymptotis datum ſit punctum aliquod, per quod hyperbola debeat tranſire. Neque enim in expoſito problemate alium uſum nobis præſtitit potentia, expreſſa per rectangulum DAE, quam ut, completo parallelogrammo AF, haberi poſſet punctum F, per quod tranſire deberet hyperbola. Unde, ſi loco potentiæ daretur ab initio punctum F, adhuc ſolutio problematis eadem foret futura.

Idem problema, de deſcribenda hyperbola in plano, datis ejus aſymptotis, & potentia, reſolvi quoque poteſt, inveniendo axem, & focos ipſius hyperbolæ. Si enim angulus BAC, ſub aſymptotis comprehenſus, ſecetur bifariam per rectam AF; dabit recta iſta AF poſitionem axis hyperbolæ. Etſi porro, conſtituto AB quadrato quadruplo datæ potentiæ, demittatur ſuper AF perpendicularis BC; fiet punctum F vertex ipſius axis. Unde demum, ſicuti vertex alter habetur, capiendo ad partem oppoſitam AG, ipſi AF æqualem; ita circulus, qui deſcribitur centro A, & intervallo AB, vel AC, quæſitos in axe focos deſignabit.

LI.

Digitized by Google

LIBER VIII.

De Conſtructione Problematum Solidorum.

TRadita compoſitione locorum geometricorum, quæ conicis ſectionibus terminantur; reliquam jam eſt, ut eaſdem coni ſectiones ad conſtructionem problematum ſolidorum traducamus. Sed, ut methodus iſtud obtinendi rectius intelligatur, præſtat, rem paulo altius repetere, & breviter primum explicare, quo quidem artificio problematum geometricorum conſtructiones generaliter fieri debeant.

CAP. I.

Ratio conſtruendi problemata geometrica generatim explicatur.

I. DIximus præcedenti libro, problemata geometrica proprie vocari ea, quæ determinata ſunt, omneſque continent conditiones, ad ſolutiones ipſorum neceſſarias; nec alia ratione illa, quæ ſunt indeterminata, a Geometris conſiderari, quam ut eorum ope determinatis ſatisfiat, quæ præ- I. *Qua ratione problemata determinata per loca geometrica conſtruuntur.*

Digitized by Google

cipuum Geometriæ objectum conſtituunt. Videamus itaque modo, *quo demum artificio problemata determinata conſtruantur, adhibitis iis, quæ indeterminata ſunt, & per loca geometrica explicantur*.

Nimirum primo invenienda ſunt duo loca geometrica, quæ omnes conſtruendi problematis conditiones ſeorſim includant. Tum ita oportet loca illa conſtruantur, ut valores unius incognitæ ſuper eadem recta in utroque loco capiantur. Nam, quum valores incognitarum, ubi linearum, compoſita loca terminantium, fit interſectio, conditiones habeant utriuſque loci geometrici; neceſſe eſt, ut valores illi problematis ſolutioni ſatisfaciant.

Oporteat, exempli gratia, invenire rectangulum, cujus latera datam habeant rationem inter ſe, & ſimul ſumpta datam quoque rectam adæquent. Jam in hoc problemate determinato duæ conditiones continentur. Quare, iis a ſe mutuo ſejunctis, duo fient indeterminata problemata; unum, in quo quæritur rectangulum, cujus latera datam rationem habeant inter ſe; alterum, in quo quæritur rectangulum, cujus latera ſimul ſumpta datam rectam adæquent.

Duo iſta problemata indeterminata duo etiam nobis ſuppetunt loca geometrica. Unde, quum in iis utraque propoſiti problematis conditio ſeorſim contineatur, poterunt pro ejuſdem problematis conſtructione loca illa in ſubſidium advocari. Conſtruantur ergo illiuſmodi loca ea quidem lege, ut va-

lo-

lores unius, ejuſdemque incognitæ ſuper eadem recta in utroque loco capiantur. Et valores, quos habent incognitæ in loco interſectionis, quæſitum rectangulum continebunt.

II. Ut autem id liquido conſtet, *revocemus ad calculum duo illa loca, tum expoſita ratione utrumque conſtruamus*. Aſſumptis ergo incognitis x, & y pro lateribus rectanguli inveniendi, ſi eorum ratio ponatur æqualis ei, quam habet a ad b; erit, ut x ad y, ita a ad b; adeoque erit $y = bx : a$ æquatio primi loci. Quod ſi porro ſumma earundem laterum dicatur c; fiet $x + y = c$, vel $y = c - x$ æquatio ſecundi loci. II. *Artificium conſtructionis problematum determinatorum exemplo illuſtratur.*

Sit jam AB recta linea, per cujus portiones AN deſignantur valores incognitæ x; & AC recta alia, cui æquidiſtantes eſſe debent rectæ NM, quæ valores referunt alterius incognitæ y. Quumque æquatio primi loci ſit $y = bx : a$; perſpicuum eſt, quod ſi ex AB abſcindatur portio AD $= a$, & ducta DE ipſi AC parallela, fiat eadem DE $= b$, terminari debeat locus ille per rectam AE, quæ conjungit puncta duo A, & E. FIG. 107.

Quia autem æquatio ſecundi loci eſt $y = c - x$, conſtruetur alter iſte locus, faciendo, tum AB, cum AC $= c$, & conjungendo puncta duo B, & C per rectam BC. Nam, ob triangula æquiangula BAC, BNM, erit, ut AB ad AC, ita BN ad NM. Quare, propter æquales AB, AC, erunt etiam æquales duæ BN, NM; adeoque, quum ſit BN $= c - x$, & NM $= y$, erit $y = c - x$.

Termini igitur eorum locorum ſunt rectæ AE, BC. Quum autem rectæ iſtæ ſeſe ſecent in puncto F; habebit punctum iſtud F utriuſq;loci conditiones. Quare, ducta FG, ipſis MN parallela; erunt rectæ AG, FG in data ratione, ob locum AE; & eædem ſimul datam ſummam conſtituent, ob locum BC: proindeque latera quæſiti rectanguli erunt rectæ ipſæ AG, FG.

III. *Quomodo cognoſcenda ſint loca, quibus determinatum problema conſtrui poſſit.*

III. Neque vero difficile erit, inquirere, *num duo loca geometrica omnes alicujus problematis determinati conditiones includant.* Si enim ex eorum æquationibus colligi poſſit ipſa problematis æquatio; indicio erit, in locis illis ſingulas problematis conditiones includi. Quod ſi autem ſecus contigerit; nec item in iis locis omnes problematis conditiones continebuntur.

Ita, ſi æquatio problematis ſit $x = ac : (a - b)$, nulli dubium eſſe poteſt, quin omnes ejuſdem problematis conditiones includantur in duobus locis geometricis $y = ax : c$, & $y = bx : c + a$. Nam, quum ex duabus hiſce æquationibus eruatur $ax : c = bx : c + a$; reductione inſtituta, fiet $ax - bx = ac$, ſive etiam $x = ac : (a - b)$, quæ eſt ipſa problematis æquatio.

Similiter, ſi æquatio problematis ſit $xx + bx - ax + bb = o$, dubitari non poteſt, quin omnes ejuſdem problematis conditiones contineantur in duobus locis geometricis $yy = 2ax - xx - bb$, & $y = x + b$. Nam, quum duæ iſtæ æquationes dent nobis $2ax - xx - bb = xx + 2bx + bb$; reductione inſti-

ſtituta, fiet $2xx + 2bx - 2ax + 2bb = o$, ſive etiam $xx + bx - ax + bb = o$, quæ eſt problematis æquatio propoſita.

Atque ita quoque, ſi in reſolutione alicujus problematis perventum ſit ad æquationem $x^3 + aax - aab = o$, in dubium verti non poteſt, quin contineant omnes ejuſdem problematis conditiones duo loca geometrica $xx = ay$, & $bx - xx = yy$. Nam, quum ex duabus hiſce æquationibus eruatur $bx - xx = x^4 : aa$; reductione inſtituta, fiet $aabx - aaxx = x^4$, ſive etiam $x^3 + aax - aab = o$, quæ eſt ipſa problematis æquatio.

IV. *Ratio inveniendi eadem loca in medium affertur.*

IV. Sed nec etiam difficile erit, *duo loca geometrica reperire, quæ omnes alicujus problematis determinati conditiones includant.* Inveniatur etenim æquatio, ad quam propoſitum problema reducitur. Tum, ſumpta ad libitum æquatione alia indeterminata, complicentur ambæ ſimul, quoties fieri poteſt, ſive ſubſtitutionis, ſive additionis, ſive demum ſubtractionis ope. Atque hac ratione, non duo tantum, ſed plura loca geometrica reperientur, quorum bina quævis ſingulas problematis conditiones continebunt.

Sit, exempli gratia, $x^4 + aaxx - aabx - a^3c = o$ æquatio, ex reſolutione alicujus determinati prbolematis orta. Capiatur æquatio indeterminata $xx - ay = o$, ſive $xx = ay$. Jamque, ſi in ea ponatur $aayy$ loco x^4, habebitur $aayy + aaxx - aabx - a^3c = o$, ſive $yy + xx - bx - ac = o$, quæ eſt æquatio altera indeterminata. Et ſi porro in iſta loco xx ponatur ay, fiet $yy + ay - bx - ac = o$, quæ

Digitized by Google

eſt tertia æquatio indeterminata.

Tres iſtæ æquationes indeterminatæ jam tria nobis loca geometrica ſuppetunt, quorum ſingula paria cunctas problematis conditiones complectuntur. Sed poſſunt, additionis, ſubtractioniſque ope, tres aliæ reperiri, quæ eundem præſtent effectum. Addendo enim priores duas, fiet $yy + 2xx - ay - bx - ac = 0$; addendo autem duas poſteriores, habebitur $2yy + xx + ay - 2bx - 2ac = 0$; ac denique addendo ſimul primam, & tertiam orietur $yy + xx - bx - ac = 0$, quæ tamen a ſecunda non differt.

Eadem ratione, ſubducendo primam ex ſecunda, orietur $yy + ay - bx - ac = 0$, quæ non differt a tertia; & ſubducendo ſecundam ex tertia, habebitur $ay - xx = 0$, ſive $xx - ay = 0$, quæ eſt ipſiſſima prima. Sed, ſi prima ex tertia ſubducatur, fiet $yy - xx + 2ay - bx - ac = 0$, quæ a ſingulis præcedentibus diverſa deprehenditur.

V. *Quod unum idemq; problema variis rationibus conſtrui poſſit.*

V. Id, quum ita ſit, liquet, *unum, idemque problema geometricum non una ratione conſtrui poſſe.* Primo enim pro eodem problemate poteſt, modo una, modo alia æquatio reperiri: prout hanc, aut illam lineam aſſumere placet, velut incognitam. Et deinde, etiamſi ſemper eadem futura eſſet problematis æquatio; adhuc tamen variis, multiſque modis problema conſtruere liceret: ob varia locorum geometricorum paria, in quibus ſingulæ problematis conditiones poſſunt ſeorſim contineri.

Interim, ut non omnes problematis con-

Digitized by Google

conſtructiones Geometriæ legibus correſpondent; ſic inter eas, quas legitimas Geometria fatetur, dantur perſæpe quædam, quæ facilitate, ac elegantia merentur reliquis præferri. Unde, quum problema aliquod geometricum conſtrui debet, non modo vitandæ ſunt eæ conſtructiones, quæ vitio argui poſſunt; ſed in id etiam ſedulo incumbendum, ut eligantur conſtructiones illæ, quæ Geometriæ ſolertiam, ac nitorem oſtendunt.

Hinc duo nobis hoc loco præſtanda ſunt. Primo enim oportet oſtendamus, quæ quidem problematum conſtructiones legitimæ cenſendæ ſint, quæve per contrarium vitio argui queant. Deinde vero inter ipſas conſtructiones, quæ Geometriæ legibus correſpondent, nec ullo vitio laborant, qua utique ratione faciliores, ſimplicioreſque dignoſci poſſint, oportet aperiamus.

Et quantum ad primum, eæ quidem conſtructiones velut legitimæ haberi debent, quæ naturæ problematum conſonæ ſunt. Neque enim omnia problemata per cujuſcumque generis loca geometrica conſtrui poſſunt; ſed unumquodque pro ſuo gradu determinati generis loca requirit. Unde, ut de rectitudine conſtructionum tuto judicium ferri poſſit, conſtituendi primum ſunt gradus problematum geometricorum.

VI. Plane *Veteres*, referente Pappo, *problematum geometricorum tria genera diſtinguebant, & eorum alia quidem plana, alia ſolida, & alia demum linearia appellabant.* Quæ enim per rectas, & circuli circumferentiam

VI. Quomodo Veteres problemata diſtinguebant, & quo vitio diſtinctio illa laboret.

tiam

tiam ſolvi poſſunt, vocabant plana: ob ortum earum linearum, quem habent in plano. Quæ vero ſolvuntur, aſſumpta in conſtructione aliqua coni ſectione, dicebant ſolida; quia coni ſectiones ex ſolido trahunt originem ſuam. Et denique, quæ conſtrui nequeunt, niſi adhibitis lineis aliis, præter jam dictas, linearia nuncupabant: velut problemata, quæ ut conſtruantur, lineas alias magis compoſitas exigunt.

Sed hujuſmodi problematum geometricorum diſtinctio, a Veteribus facta, non uno vitio laborat. Primo enim per eam natura problematis non ſemper nobis innoteſcit. Etſi enim tuto concludere liceat, problema eſſe planum, quotieſcumque circulo, & recta conſtruitur; quod tamen ſit ſolidum, aut lineare, numquam certo, ac infallibiliter ſtatui poteſt; quum impoſſibile ſit, ejus criterii certiorem fieri, quod, juxta Veteres, tum ſolidum a plano, cum lineare a plano, & ſolido ſecernere valet.

Ut enim, ex mente Veterum, ſolidum dici poſſit aliquod problema, haud quidem ſatis eſt, aliqua coni ſectione conſtrui poſſe; ſed neceſſe eſt quoque, ut recta, & circulo nullimode conſtrui queat. Quare, non aliter concludere licebit, ſolidum eſſe problema aliquod, quam ubi illiuſmodi impoſſibilitas extra omnem dubitationis aleam ponitur: & propterea, quum id ſine alterius criterii ope obtineri non poſſit, conſequens eſt, ut nec item ſolidum problema diſtinguere liceat.

Similiter, ut juxta Veteres lineare di-

ci.

ci poſſit aliquod problema, haud quidem ſatis eſt, linea alia magis compoſita conſtrui poſſe; ſed oportet etiam, ut reſpuat, tum circuli circumferentiam, cum coni ſectiones. Quare, tunc demum concludere licebit, lineare eſſe problema aliquod, quum oſtenditur, nec circulo, nec aliqua coni ſectione poſſe conſtructionem ejus obtineri. Unde, quum id evinci nullimode queat, niſi criterium aliud habeatur; nec item lineare problema a plano, & ſolido poterit ſecerni.

Hinc, poſita problematum geometricorum diſtinctione, a Veteribus facta, tantum abeſt, ut reprehenſione digni ſint ii, qui duplicationem cubi, & anguli triſectionem porecta, & circulo tentare conantur; quin potius, meo judicio, laudem omnem merentur, & excitandi eo magis, ut nullum non moveant lapidem, quo videant, num Geometriæ planæ præſidio conſtructio eorum problematum poſſet haberi. Nam etſi eorum conatus ſemper irriti forent futuri; exinde tamen eo magis probabile redditur, problemata illa natura ſua eſſe ſolida, & non jam plana.

VII. *Aliud vitium in diſtinctione problematum, a Veteribus facta, indicatur.*

VII. Sed *alio quoque vitio laborat diſtinctio problematum geometricorum, quam Veteres condiderunt*: nimirum, quod juxta eam nullum non fiat diſcrimen inter problemata, quæ nec plana ſunt, nec ſolida; ſed omnia in uno eodemque gradu reponantur. Inde enim colligi poſſet, quod ſicuti ejuſdem naturæ ſunt, tam cuncta problemata plana, quam omnia problemata ſolida; ſic quoque ſingula problemata linearia eandem naturam deberent habere.

In-

Digitized by Google

Interim nolim ex hac parte adeo Veteres increpare. Neque enim problemata linearia ita ii excoluere, quemadmodum plana, & ſolida. Unde, tametſi eis innotuerit, dari problemata quædam, quæ nec plana, nec ſolida eſſent; multiplices tamen, ac pene infinitas eorum problematum differentias minime norunt: quippe quæ non aliter fiunt cognitæ, ac exploratæ, quam ubi aliquot ex iis problematibus ad examen revocantur.

Notetur autem hoc loco velim, quod ſicuti problematum geometricorum tria genera Veteres diſtinguebant; ſic lineas omnes, quibus problematum fiunt conſtructiones, ad tres claſſes pariter revocabant. Prima etenim erat illarum, per quas plana problemata ſolvuntur; eaque nonniſi rectam, ac circuli circumferentiam continebat. Secunda complectebatur coni ſectiones, quas ad conſtructionem problematum ſolidorum oportet aſſumere. Et tertia demum omnes alias lineas magis compoſitas comprehendebat, quæ conſtructioni problematum linearium inſerviunt.

Revocabant porro ad tertiam hanc claſſem, non modo omnes alias lineas geometricas, ut ciſſoidem Dioclis, conchoidem Nicomedis; verum etiam lineas mechanicas, ut quadratricem Dinoſtrati, ſpiralem Archimedis. Qua in re nec etiam adeo ii velim arguantur. Nam, ſicuti, ob differentias problematum linearium, non adhuc eis exploratas, unum eorum genus conſtituebant; ſic omnino neceſſe erat, ut in una eademque claſſe reponerent, tam lineas geometricas,

quæ

quæ circuli circumferentiam, & coni ſectiones excedunt, quam lineas mechanicas, quæ cunctis natura ſua ſuperiores deprehenduntur.

Hinc, quod Carteſius antiquis Geometris vitio vertit, potius refellendo ejus errori appoſite nobis inſerviet. Ex eo enim, quod ſub eodem genere repoſuerint Veteres, tam ciſſoidem, & conchoidem, quam ſpiralem, & quadratricem; cenſuit, eos e Geometria rejeciſſe omnes alias curvas, quæ circuli circumferentia, & conicis ſectionibus magis compoſitæ eſſent. Sed crediderim, hanc eis ſententiam adſcripſiſſe, quia ipſe in ea erat opinione, ut ſpiralis, quadratrix, & ſimiles e Geometria exules eſſe deberent: quam tamen vel ex eo exuere poterat, quod illiuſmodi lineas ad eandem claſſem cum curvis aliis geometricis ipſi Veteres revocabant.

VIII. Quum igitur diſtinctio problematum geometricorum, a Veteribus facta, in plana, ſolida, & linearia, non uno vitio laboret; rectius Recentiores *diſtinguunt genera problematum ex numero dimenſionum, ad quas eorum æquationes aſcendunt*. Et quamquam Carteſius duabus dimenſionibus ea a ſe mutuo diſtinguenda eſſe putaverit; communiter tamen unica tantum dimenſione a ſe invicem ſecernuntur, & unumquodque problema ejus generis eſſe cenſetur, quod ipſe æquationis gradus oſtendit. VIII. *Diſtinctio problematum ex numero dimenſionum, ad quas eorum æquationes aſcendunt.*

Itaque, ſi æquatio problematis ſit primi gradus, ſive unius tantum dimenſionis; ipſum quoque problema primi generis eſſe di-

dicetur. Sed, ſi æquatio fuerit ſecundi gradus, ſeu duarum dimenſionum; tunc etiam problema dicetur eſſe generis ſecundi. Atque ita pariter dicetur eſſe generis tertii, ſi ejus æquatio fuerit tertii gradus, ſive trium dimenſionum; generis quarti, ſi æquatio ſit quarti gradus, ſive quatuor dimenſionum; generis quinti, ſi æquatio ſit quinti gradus, ſive quinque dimenſionum; atque ita deinceps.

Notandum tamen hoc loco eſt, quod æquatio aliqua tunc proprie dicitur eſſe alicujus gradus, quum ad gradum alium inferiorem deprimi non poteſt. Unde, ſi in reſolutione alicujus problematis perventum ſit ad æquationem aliquam, quæ deprimi queat; tunc, ut de genere problematis judicium ferri poſſit, neceſſe eſt, prius deprimere æquationem illam per regulas, quæ in Algebra traduntur; quia ſic problema ejus generis eſſe dicetur, quod depreſſus gradus oſtendit.

Illud quoque nolo hic reticere, quod etſi, definiendis conſtructionibus, quæ naturæ problematum conſonæ ſunt, conſultius ſit, unica tantum dimenſione eorum genera a ſe invicem diſtinguere; attamen, ſi in cujuſque conſtructione circulus vellet adhiberi, tunc potius probanda eſſet diſtinctio problematum Carteſiana, quæ per duas dimenſiones procedit; quum in eo caſu lex conſtructionis intra binas dimenſiones eadem ſemper, ac immutata perſeveret.

Interim, vitandæ confuſionis gratia, etiam quum quæſtio erit, de adhibendo circulo in conſtructione cujuſque problematis,

uni-

Digitized by Google

unica tantum dimenſione diſtinguemus a ſe mutuo genera problematum. Nam, juxta hanc diſtinctionem, nullo negotio pro ſingulis caſibus regulæ tradi poſſunt; quum tamen, recepta diſtinctione Carteſiana, nonniſi per ambages id, quod quiſque caſus exigit, poterit definiri.

IX. *Quæ conſtructiones ſunt legitimæ, & naturæ problematum conſonæ.*

IX. Problematum generibus conſtitutis, *facile modo erit, conſtructiones definire, quæ eorum naturæ conſonæ ſunt, & velut legitimæ debent haberi.* Jam enim vidimus ſupra, pro cujuſque problematis conſtructione, adhibenda eſſe duo loca geometrica, quæ ſingulas problematis conditiones ſeorſim includant. Itaque, ut conſtructio legitima ſit, & naturæ problematis conſona, loca illa talia inſuper ſint oportet, ut multiplicatis per ſe mutuo numeris ſuarum dimenſionum, oriatur numerus alter, qui vel ipſum problematis genus, vel etiam genus proxime ſuperius nobis exhibeat.

Hac ratione, ſi problema ſit quarti generis, legitima erit conſtructio, quæ per loca duo geometrica ſecundi generis abſolvitur: enim vero, multiplicatis ſimul duobus binariis, producitur numerus quaternarius, per quem gradus problematis oſtenditur. Et eadem ratione, ſi problema ſit generis ſexti, erit conſona ejus naturæ conſtructio, quæ perficitur loco ſecundi generis, & alio tertii; quandoquidem ex multiplicatione numeri binarii per numerum ternarium producitur numerus ſenarius, per quem problematis genus exhibetur.

Quum

Digitized by Google

Quum vero non ſemper fieri poſſit, ut numerus, problematis genus oſtendens, ex aliis duobus, per ſe mutuo multiplicatis, oriatur; hinc eſt, ut pleriſque in caſibus loca geometrica talia eſſe debeant, ut eorum exponentes, in ſe invicem ducti, genus proxime ſuperius exhibeant. Sic per loca duo ſecundi generis conſtruenda ſunt, non modo problemata generis quarti, verum etiam ea, quæ genus tertium conſtituunt. Atque ita quoque per locum ſecundi generis, & alium tertii conſtrui debent, tam problemata generis ſexti, quam quæ ad quintum genus revocantur.

Quemadmodum autem abunde liquet, id dumtaxat contingere poſſe in iis problematum generibus, quæ per numeros impares definiuntur; ſic liquido etiam patet, non in omnibus hiſce generibus tale quidpiam evenire. Si enim, exempli gratia, problema ſit noni generis; poterit conſtructio ejus per loca duo generis tertii obtineri. Et eadem ratione, ſi problema ſit generis decimiquinti; nihil obſtat, quin per locum tertii generis, & alium quinti conſtructio illius peragatur. Contingit id ergo in iis tantummodo generibus, quorum exponentes ſunt numeri primi; quum notum ſit, hujuſmodi numeros nullos diviſores admittere.

X. *Allata regula conſectaria quædam in medium afferuntur.*

X. Ex regula jam tradita, pro definiendis conſtructionibus, quæ legitimæ ſunt, & naturæ problematum conſonæ, *plura modo licebit inferre, non exiguam rei, de qua agimus, lucem allatura.* Primo enim perſpicuum eſt,

Digitized by Google

eſt, poſſe unum, idemque problema per multiplicis generis loca legitime conſtrui. Sic problema duodecimi generis conſtruere licet, non modo per locum generis tertii, & alium quarti; verum etiam per loca duo, quorum alter ſit ſecundi generis, alter generis ſexti.

Deinde liquet etiam, unumquodque problema legitime conſtrui poſſe per locum geometricum, qui ſit ejuſdem generis cum ipſo problemate. Nam ſemper ac locus alter aſſumitur generis primi; jam duo illa loca talia erunt, ut eorum exponentes, per ſe mutuo multiplicati, conſtruendi problematis genus oſtendent. Et quoniam loca primi generis ſunt ſemper ad rectam; non aliter, quam rectæ, & curvæ alicujus interſectione, hujuſmodi conſtructiones erunt peragendæ.

Liquet demum, quod ſi cujuſque problematis conſtructio circulo fieri velit, omnino neceſſe ſit, ut locus alter geometricus ſit ejus generis, cujus exponens duplicatus exhibet, vel ipſum problematis genus, vel genus proxime ſuperius. Eſt enim circulus, locus ſecundi generis. Quare, ubi una cum ipſo alter ille locus adhibetur; jam problema conſtruitur per loca duo, quorum exponentes, in ſe mutuo ducti, exhibent nobis, vel proprium problematis genus, vel quod proxime illud ſubſequitur.

Itaque, ſi problema decimi generis circulo foret conſtruendum, oporteret, locum alium quinti generis eſſe; nec aliter eſſe deberet, ſi problema, circulo conſtruendum, non decimi, ſed noni generis eſſet. Et eadem

ratione, tam problema generis undecimi, quam quod ad duodecimum genus revocatur, non aliter recte circulo conſtruitur, quam aſſumpto in conſtructione loco alio, qui ſit generis ſexti.

Hinc, quotieſcumque problemata circulo conſtrui debent, lex ipſius conſtructionis intra duas dimenſiones eadem ſemper perſeverat. Atque hac de cauſa diſtinctio problematum Carteſiana, quæ per duplicem dimenſionem procedit, probari potius, quam rejici deberet. Nam, juxta eam, locus alter, quem in conſtructione oporteret aſſumere, foret ſemper ejuſdem generis cum ipſo problemate conſtruendo.

XI. *Oſtenditur veritas regula pro definiendis conſtructionibus legitimis, & natura problematum conſonis.*

XI. Cæterum haud difficile erit, *oſtendere veritatem regulæ, ſuperius traditæ, pro definiendis conſtructionibus, quæ legitimæ ſunt, & naturæ problematum conſonæ*. Jam enim loca, in conſtructione problematis adhibenda, debent ſingulas ejus conditiones ſeorſim continere. Quare, tunc quidem legitima erit conſtructio, & naturæ problematis conſona, quum ſimpliciora loca adhibentur, quæ omnes illius conditiones ſeorſim complectuntur.

Hinc, ut præfatæ regulæ veritas conſtet, duo quidem ſunt nobis oſtendenda. Primum eſt, ut omnes alicujus problematis conditiones contineri poſſint in duobus locis geometricis, quorum exponentes, in ſe mutuo ducti, exhibent, vel ipſum problematis genus, vel genus proxime ſuperius. Alterum eſt, ut loca, quorum exponentes, per ſe invicem multiplicati, exhibent genus inferius, nequeant

quea nt

queant ejuſdem illius problematis conditiones omnes ſeorſim comprehendere.

Neſcio autem, nunc horum utrumque ſua egeat demonſtratione. Ut enim vidimus ſupra, tunc quidem duo loca geometrica ſingulas alicujus problematis conditiones ſeorſim includunt, quum ex eorum æquationibus eruere licet æquationem, ex reſolutione problematis ortam. Unde eo res redit, ut oſtendamus, æquationem iſtam haberi quidem poſſe per loca priora, ſed non item per loca ſecunda.

Id vero in ipſis Algebræ Elementis oſtenditur. Nam, quum quæſtio eſt, de exterminanda incognita una, per æquationes duas, quæ totidem incognitas complectuntur; regula traditur in iis, ope cujus liquet abunde, æquationem, incognitam alteram continentem, poſſe quidem aſcendere ad eum gradum, qui producitur, multiplicatis per ſe mutuo gradibus earum æquationum; altius autem attolli nullimode poſſe.

Atque hinc, alio rurſus artificio, inveniri poterunt loca duo, quibus determinati alicujus problematis conſtructio peragi poſſit. Nimirum, capiendo indefinite loca illa, tum per eorum æquationes exterminando incognitam unam, & inveniendo æquationem, quæ alteram tantum incognitam contineat. Nam, inſtituta deinde comparatione inter æquationem iſtam; & eam, ad quam problema reducitur, facili negotio quæſita loca definientur.

XII. Quum ergo jam nobis innotuerit, XII. *Quomodo*

Inter conſtructiones legitimas faciliores, ſimplicioreſque dignoſci poſſint, aperitur.

quæ conſtructiones ſint legitimæ, & naturæ problematum conſonæ; inquirendum eſt modo, *qua ratione inter eas faciliores, ſimplicioreſque dignoſci poſſint*. Et quidem negotium iſtud dijudicandum eſt ex locis, quibus ipſæ problematum conſtructiones peraguntur. Nam, etſi loca omnia, quæ æquationibus ejuſdem gradus definiuntur, ad idem omnino genus pertineant; quin tamen inter ea fieri debeat diſcrimen aliquod, non eſt dubitandum.

Hujuſmodi vero diſcrimen repeti primo debet ex ipſis lineis, quibus loca terminantur: in quantum non omnes eadem facilitate in plano deſcribuntur. Sic lineæ, loca ſecundi generis terminantes, ut ſuperius vidimus, ſunt circuli circumferentia, & conicæ ſectiones. Sed nulli dubium eſſe poteſt, quin circumferentia circuli longe facilius deſcribatur in plano, quam quælibet ſectio coni.

Idem diſcrimen repetendum eſt quoque ex æquationibus eorundem locorum. Nam, etſi ad eundem locum per varias æquationes poſſit perveniri; nequit tamen in dubium revocari, quin ipſa loci compoſitio eo facilior futura ſit, quo minus compoſita eſt ejus æquatio. Sic loca, conicis ſectionibus terminata, eo quidem facilius conſtruuntur, quo magis æquationes, quibus deſignantur, ad formulas ipſorum ſimpliciſſimas accedunt.

Hæc autem quum ita ſint, liquet, facilitatem, ſimplicitatemque conſtructionis geometricæ æſtimandam eſſe duplici ex capite; primo nempe ex faciliore ratione, qua lineæ, lo-

Digitized by Google

loca terminantes, deſcribuntur; & ſecundo ex ſimpliciore apparatu, quo opus eſt, pro determinatione earundem linearum. Unde in hæc duo ſedulo oportet incumbere, quo elegans, ac valde ſimplex dati alicujus problematis conſtructio poſſit haberi.

Qui igitur in conſtruendo problemate aliquo, loco conicæ ſectionis, circulum ſubſtituit, non eſt dubitandum, quin faciliorem, ſimplicioremque conſtructionem exhibeat; quandoquidem circulus in plano facilius longe deſcribitur, quam quælibet ſectio conica. Et eadem ratione nulli etiam dubium eſſe poteſt, quin elegantior futura ſit dati alicujus problematis conſtructio, quum conica ſectio, quæ aſſumitur in ea, refertur per ſuam æquationem, vel ad ipſam diametrum, vel ad aliquam ejus parallelam.

C A P. II.

Ratio conſtruendi problemata plana in medium affertur.

I. ETſi in hoc libro propoſitum nobis ſit, dumtaxat de conſtructione eorum problematum agere, quæ ſolida a Veteribus dicebantur: nihilo tamen minus, quemadmodum, ad pleniorem ejus rei intelligentiam, neceſſarium duximus, generatim prius explicare, quo pacto problemata geometrica conſtruantur; ſic, ob eandem ratio-

I. Quæ ſint problemata plana, juxta Recentiorum diſtinctionem, oſtenditur.

S 3 nem,

nem, præmittenda eſt quoque conſtructio problematum, quæ iidem Veteres plana vocabant; quum ipſa ſolida problemata nullimode abſque ea conſtrui poſſint.

Plana igitur problemata, ut præcedenti capite dictum eſt, vocabant Veteres ea, quæ recta, & circulo conſtrui poſſunt. Unde, juxta Recentiorum diſtinctionem, non alia problemata tale nomen merentur, quam *quæ, tum ad primum, cum ad ſecundum genus revocantur*. Iſtorum enim problematum æquationes ſecundum gradum non excedunt. Quare eadem problemata per ea ſemper loca geometrica conſtruere licebit, quæ recta, & circuli circumferentia terminantur.

Et illa quidem problemata, quæ primi ſunt generis, nec etiam circulo opus habent, ſed rectis tantum conſtrui poſſunt. Aſſumenda eſt autem circuli circumferentia, in conſtructione eorum problematum, quæ ſecundi ſunt generis. Nam numerus binarius, per quem iſtorum genus oſtenditur, non aliter poteſt oriri, quam multiplicando unitatem per eundem numerum binarium; adeoque omnino neceſſe eſt, ut talia problemata conſtruantur per loca duo, quorum alter ſit generis primi, alter generis ſecundi.

Quamquam vero loca primi generis rectis ſemper terminentur; ea tamen, quæ ſecundi ſunt generis, non modo circuli circumferentia, ſed omnibus coni ſectionibus poſſunt circumſcribi. Hinc problemata, quæ ſecundum genus conſtituunt, tam recta, & circulo, quam recta, & qualibet coni ſectione.

ne.

Digitized by Google

ne conſtruere liceret. Sed præferendæ ſunt eæ conſtructiones, quæ recta, & circulo fiunt; quia circuli circumferentia facilius longe in plano deſcribitur.

II. Jam, ut *ea primum problemata conſtruere doceamus, quæ primi ſunt generis*, ſciendum eſt, quod ſi æquatio, ex aliquo horum problematum orta, ſit adeo ſimplex, ut habeatur $x = a$; tunc nulla arte opus ſit, pro ejus conſtructione; quum nihil facilius dari poſſit, quam ut recta, alteri datæ æqualis, capiatur. Conſtructionem ergo iſtiuſmodi problematis velut poſtulatum in hoc negotio aſſumemus: eoque magis, quod eadem ſit veluti fundamentum omnium conſtructionum geometricarum.

II. Quod adſint quædam problemata primi generis, quorum conſtructiones ut poſtulata debent aſſumi.

Verum, ſi concedenda eſt nobis conſtructio hujus æquationis $x = a$, ratio exigit, ut concedantur pariter conſtructiones iſtarum $x = a + b$, $x = a + b + c$, $x = a + b + c + d$, atque ita deinceps. Nam, ſicuti ſuper recta AB capi poteſt portio AC $= a$, ita ſucceſſive ſuper eadem aſſumere licebit CD $= b$, DE $= c$, & EF $= d$. Unde, quemadmodum valor incognitæ x in æquatione $x = a$ eſt AC, ſic erit AD in æquatione $x = a + b$, AE in æquatione $x = a + b + c$, & AF in æquatione $x = a + b + c + d$. FIG. 108.

Eadem autem ratione neque etiam denegandа eſt nobis conſtructio illius problematis, ex quo ſuborta eſt æquatio $x = a - b$. Jam enim, progrediendo ex A verſus B, capi poteſt ſuper AB portio AC $= a$. Quare, redeundo ex C verſus A, poterit etiam ſuper CA, FIG. 109.

producta ſi opus, capi portio $CD = b$. Quumque hoc pacto fiat $AD = a - b$; erit eadem AD valor, quem habet incognita x in æquatione $x = a - b$.

Atque hinc ulterius nec item alicui difficultati obnoxia eſſe debet conſtructio ejus problematis, ex quo nata eſt æquatio $x = a - b + c - d$. Si enim quærantur rectæ duæ, quæ duabus ſummis $a + c$, & $b + d$ ſint æquales; eæ, ut vidimus, ultro nobis concedi debent. Unde, ſi eædem dicantur f, & g, æquatio fiet $x = f - g$, cujus quidem conſtructio nequit nobis denegari.

III. *Conſtructio problematis primi generis, ad quod omnia alia, quæ ejuſdem ſunt generis, revocantur.*

III. Conſtructionibus hiſce præjactis, ſive potius præſuppoſitis, facile modo erit, *conſtruere unumquodque aliud problema, quod primi ſit generis*. Ut vero ordine progrediamur, ſit primum $x = ab : c$ æquatio, ex reſolutione problematis orta. Jamque, ſi locus ad rectam ſimpliciſſimus $y = b$ capiatur; fiet per ſubſtitutionem $x = ay : c$, ſive etiam $y = cx : a$, quæ quidem æquatio ſimiliter ad rectam nos ducit.

Hinc problema, contentum in æquatione $x = ab : c$, conſtrui poterit duobus hiſce locis geometricis $y = cx : a$, & $y = b$; ut quæ non modo ſingulas ejus conditiones ſeorſim continent, ſed ambo etiam lineis rectis terminantur. Hunc in finem ſit AB recta, per cujus portiones AN deſignantur in utroque loco valores incognitæ x; & AC ea, cui in utroque pariter loco æquidiſtantes eſſe debent valores alterius incognitæ y. (FIG. 110.)

Quum igitur æquatio primi loci ſit $y = cx : a$,

$cx:a$, conſtruetur ille, ſi abſciſſa ex AB portione AD $=a$, ductaq; per punctum D recta DE, ipſi AC parallela, fiat DE $=c$, & jungatur AE. Quumque æquatio ſecundi loci ſit $y=b$, fiet alterius hujus loci conſtructio, abſcindendo ex AC portionem AF $=b$, & ducendo per punctum F rectam FH, alteri AB parallelam.

Jam rectæ duæ AE, FH, omnino neceſſe eſt, ut ſibi mutuo occurrant. Fiat itaque earum occurſus in puncto M. Et, demiſſa exinde ſuper AB recta MN, ipſi AC parallela; erit AN valor, quem habet incognita x in æquatione $x=ab:c$. Ponatur enim AN $=x$. Et quoniam, ob triangula æquiangula ADE, ANM, AD eſt ad DE, ut AN ad NM, ſive AF: erit, ut a ad c, ita x ad b: & propterea erit $x=ab:c$.

IV. Exhibita conſtructione problematis, contenti in æquatione $x=ab:c$; *jam, ope ejus, omnia alia, quæ primi ſunt generis, conſtruere licebit*; quum facile ſit, ea mediante, æquationes omnes primi gradus ad formam illam revocare. Ita, ſi æquatio problematis ſit $x=abc:de$; capiendo $f=ab:d$, fiet $x=cf:e$. Et, ſi æquatio ſit $x=abcd:efg$; ſumendo, tam $m=ab:e$, quam $n=cd:f$, habebitur $x=mn:g$.

IV. *Quomodo ad conſtructum problema omnia alia primi generis problemata reducuntur.*

Fieri autem poteſt, ut incognita x plures hujuſmodi quantitates adæquet. Et tunc, eas ſeorſim reperiendo, adhuc problema conſtrui poterit. Sed, ſi habeatur $x=ab:(c+d)$, vel $x=ab:(c-d)$; fiet conſtructio, ponendo f loco ipſius $c+d$, vel $c-d$; quum ſic æquatio evadat $x=ab:f$. Atque ita quoque, ſi fue-

ſi fuerit $x = abc : (de + fg - bl)$, capiatur $m = (de + fg - bl) : a$, & habebitur $x = bc : m$.

Præterea, ſi in reſolutione alicujus problematis perventum ſit ad æquationem $x = (ab - cd) : (m + n)$; conſtruetur illud, capiendo $f = m + n$; quum hac ratione habeatur æquatio $x = ab : f + cd : f$, quæ jam conſtrui poteſt. Pariterque, ſi æquatio problematis ſit $x = (abc - adf) : (gb - mn)$, capiatur $l = gb : a - mn : a$, ita ut ſit $al = gb - mn$; & habebitur loco ejus hæc alia æquatio $x = bc : l - df : l$, quam ſimiliter conſtruere licet.

Opus eſt autem ſolertia Geometræ in æquationum reductionibus inſtituendis, ut quæ contrahi quandoque poſſunt. Ita, ſi habeatur æquatio $x = (aabc - bbcc) : (abc + a^3)$, facillime fiet ejus reductio, capiendo $d = bc : a$. Nam, quum ſit $ad = bc$, & $aadd = bbcc$; ſubſtitutione peracta, habebitur $x = (ad - dd) : (d + a)$. Unde, ponendo poſtea, tum $m = a - d$, cum $n = d + a$; fiet $x = dm : n$ æquatio reducta.

V. Quorſum reducatur conſtructio problematum primi generis, aperitur.

V. Non igitur dubitari poteſt, quin omnia problemata primi generis nullo negotio conſtruantur, ubi ſemel conſtructum eſt problema, quod exhibet æquatio $x = ab : c$. Et quoniam problema iſtud non aliud involuit, quam ut, datis tribus rectis lineis, quarta proportionalis inveniatur; liquet, *cuncta primi generis problemata, per inventionem quartæ alicujus proportionalis, conſtrui poſſe.*

Sed notetur hoc loco velim, ejuſdem illius problematis, quod continetur in æquatio-

tione $x = ab : c$, plures alias conſtructiones dari poſſe. Placuit autem eam eligere, quæ ſuperius allata eſt; tum quia eſt omnium ſimpliciſſima; tum etiam, quia affinis eſt illi, qua uſus eſt Euclides in ſuis Elementis, pro inveniẽda quarta proportionali poſt tres rectas lineas datas.

Plane enim, ſi quemadmodum æquatio conſtruenda eſt $x = ab : c$, ſive $cx = ab$, ita capiatur æquatio ad rectam $dx : a = y$, ſive $dx = ay$; fiet, addendo eas ſimul, $cx + dx = ab + ay$, quæ ſimiliter ad rectam nos ducit. Unde æquatio $cx = ab$ conſtrui quoque poterit, adhibitis duobus hiſce locis geometricis $dx = ay$, & $cx + dx = ab + ay$.

Quin etiam, ſi æquatio aſſumpta $dx = ay$ ſubducatur ex ipſa $cx = ab$, habebitur tertius locus ad rectam $cx - dx = ab - ay$. Unde ejuſdem illius æquationis conſtructio fieri pariter poterit, tum ope locorum $dx = ay$, & $cx - dx = ab - ay$, cum ope iſtorum $cx + dx = ab + ay$, & $cx - dx = ab - ay$. Interim, ſi fuerit $c = d$, ex prima harum conſtructionum rurſus ſuperior orietur.

VI. Oſtenſa conſtructione problematum primi generis, videamus modo, *qua ratione ea, quæ ſecundi ſunt generis, conſtrui debeant.* Et ſimplicior quidem æquatio, quæ ex aliquo horum problematum poteſt oriri, eſt $xx = ab$. Quumque eo res redeat, ut inter duas rectas datas media proportionalis inveniatur; conſtrui poterit illiuſmodi problema eo quidem artificio, quo utitur Euclides in Elementis pro mediæ proportionalis inventione.

VI. *Conſtructio problematis ſecundi generis, ad quod omnia alia, quæ ejuſdem ſunt generis, reducuntur.*

Ve-

Verum, ut methodo noſtro tale artificium inquiramus, capiatur locus ad rectam ſimpliciſſimus $y = c$. Et quoniam habetur, tum $xx = ab$, cum $yy = cc$; fiet additione $xx + yy = ab + cc$. Quemadmodum autem hæc æquatio ad circulum nos ducit, quum valores incognitarum rectos angulos continent; ita, ut deſcriptio hujus circuli problema primi generis fiat, oportebit, quantitatem $ab + cc$ quadratum eſſe perfectum: quo radix ejus, quæ circuli radium refert, rationalis oriatur.

Jam quantitas illa talis eſſe non poteſt, niſi adæquet c ſemiſſem differentiæ ipſarum a, & b. Nam, ponendo a majorem eſſe, quam b, fiet $c = a:2 - b:2$; adeoque, quum ſit $cc = aa:4 - ab:2 + bb:4$, erit $ab + cc = aa:4 + ab:2 + bb:4$. Hinc ex duobus locis geometricis, quibus conſtruendum eſt problema, contentum in æquatione $xx = ab$, erit $y = a:2 - b:2$ locus ad rectam, & $xx + yy = aa:4 + ab:2 + bb:4$ locus ad circulum.

FIG. III. Sit igitur AB recta, ſuper qua ſumi debent valores incognitæ x. Et quoniam æquatio circuli nulla eget reductione, erit centrum illius ipſum punctum A; adeoque, abſciſſa ex AB portione $AD = a:2 + b:2$, fiet AD ejuſdem circuli radius. Erigatur deinde ſuper AB perpendicularis AC. Jamque, ſi ex ea auferatur portio $AE = a:2 - b:2$, & per punctum E ducatur recta GH, ipſi AB parallela; terminabitur recta iſta GH locus alter $y = a:2 - b:2$.

VII. *Veritas conſtructionis*

VIII. Neque vero difficile erit, *oſtendere, quod compoſitione horum locorum fiat ſatis pro-*

problemati, contento in æquatione $xx = ab$. Jam enim recta GH ſecare debet circulum, qui deſcribitur centro A, intervalloque AD, in duobus punctis M, O. Quare, demiſſis exinde ſuper AB perpendicularibus MN, OR, fient AN, AR valores duo, quos habet incognita x in æquatione $xx = ab$; eritque AN valor poſitivus, & AR valor negativus.

praſati problematis demonſtratur.

Ponatur ſiquidem $AN = x$. Et quoniam inter ſe ſunt æquales, tam duæ AM, AD, quam duæ MN, AE; erit $AM = a:2 + b:2$, & $MN = a:2 - b:2$. Sed, ob triangulum ANM, rectangulum in N, quadratum ex AM eſt æquale duobus quadratis AN, NM ſimul ſumptis. Itaque erit $xx + aa:4 - ab:2 + bb:4 = aa:4 + ab:2 + bb:4$, unde infertur æquatio problematis $xx = ab$.

Ponatur quoque $AR = -x$. Et quia pariter ſunt æquales inter ſe, tam duæ AO, AD, quam duæ OR, AE; erit $AO = a:2 + b:2$, & $OR = a:2 - b:2$. Sed, ob triangulum ARO, rectangulum in R, quadratum ex AO æquale eſt ſummæ quadratorum AR, OR. Quare erit rurſus $xx + aa:4 - ab:2 + bb:4 = aa:4 + ab:2 + bb:4$, unde eruitur æquatio problematis $xx = ab$.

Quod autem hæc conſtructio recidat in eam, qua utitur Euclides, pro mediæ proportionalis inventione, non eſt dubitandum. Si enim circuli circumferentia, quæ deſcribitur centro A, intervalloque AD, ſecet rectam AC in punctis C, & F; fiet portio $CE = b$, & portio $EF = a$. Unde, quum ipſis AN, AR æquales ſint duæ EM, EO; omnino liquet,

Eu-

Digitized by Google

Euclideã conſtructionem in noſtra contineri.

VIII. *Impoſſibilitas problematis non diſſimilis ex ipſa ejus conſtructione deducitur.*

VIII. Sed notetur hoc loco velim, quod *ſi æquatio problematis ſit* $xx = -ab$, *tunc ejus impoſſibilitatem, non modo ex duabus æquationis radicibus imaginariis, ſed ex ipſa etiam conſtructione eruere licebit*. Nam, aſſumpto rurſus loco ad rectam ſimpliciſſimo $y = c$, fiet locus ad circulum $xx + yy = cc - ab$. Unde oportebit, eſſe in hoc caſu quadratum perfectum, non quidem quantitatem $cc + ab$, ſed $cc - ab$.

Talis vero hæc quantitas eſſe non poteſt, niſi ſemiſummæ ipſarum a, & b ſit c æqualis. Nam, ſemper ac habetur $c = a:2 + b:2$, fiet $cc = aa:4 + ab:2 + bb:4$; adeoque erit $cc - ab = aa:4 - ab:2 + bb:4$. Hinc ex duobus locis geometricis, quibus problema conſtrui debet, erit $y = a:2 + b:2$ locus ad rectam, & $xx + yy = aa:4 - ab:2 + bb:4$ locus ad circulum.

Fig. 112. Sit itaque rurſus AB recta, ſuper qua ſumi debent valores incognitæ x. Et quoniam æquatio circuli hic pariter nulla eget reductione, erit adhuc punctum A centrum illius. Unde, abſciſſa ex AB portione AD $= a:2 - b:2$, fiet AD radius ejuſdem. Erigatur deinde ſuper AB perpendicularis AC, ex qua auferatur portio AE $= a:2 + b:2$. Quumque locus ad rectam ſit $y = a:2 + b:2$, conſtruetur ille, ducendo per punctum E rectam GH, ipſi AB parallelam.

Patet autem, rectam iſtam GH nullo pacto ſecari poſſe cum circumferentia circuli, quæ deſcribitur centro A, & intervallo AD; quan-

quandoquidem ejus a centro diſtantia major eſt ipſa AD, Unde, quemadmodum conſtructa loca nulla habent puncta communia; ita nec etiam dari poterunt valores tales incognitæ x, qui utriuſque loci conditiones adimpleant: proindeque problema, quod ſimul continet eas conditiones, omnino contradictionem involvet.

IX. Conſtructo problemate, quod continet æquatio $xx = ab$; *jam, ope ejus, omnia alia, quæ ſecundi ſunt generis, conſtruere licebit*; quum facile ſit, æquationes omnes ſecundi gradus, per conſtructiones problematum primi generis, ad formam illam revocare. Ita, ſi æquatio problematis ſit $xx = ab + cd$; capiendo $f = b + cd : a$, fiet $af = ab + cd$; atque adeo erit $xx = af$. Et, ſi æquatio ſit $xx = ab + cc + dd$; ſumendo $f = b + cc : a + dd : a$, erit $af = ab + cc + dd$; & conſequenter fiet $xx = af$.

IX. Quomodo ad conſtructum problema omnia alia ſecundi generis problemata revocantur.

Fieri autem poteſt, ut æquatio problematis oriatur affecta, & contineat quoque ſecundum terminum. Sed quum facile ſit, terminum illum ex æquatione delere; adhuc quidem eodem artificio problema conſtrui poterit. Ita, ſi æquatio problematis ſit $xx + 2ax = ab$; faciendo $x + a = z$, erit $xx + 2ax = zz - aa$. Unde, per ſubſtitutionem, erit $zz - aa = ab$, ſive etiam $zz = ab + aa$, quæ quidem æquatio jam conſtrui poteſt.

Eadem ratione, ſi in reſolutione alicujus problematis perventum ſit ad æquationem $2ax - xx = bb$, ponendum erit $x - a = z$. Nam, quum habeatur $2ax - xx = aa - zz$

$- zz$; erit, ſubſtitutionis ope, $aa - zz = bb$, ſive etiam $zz = aa - bb$: Sed nihil vetat, quin hujuſmodi problema quandoque impoſſibile fiat: nimirum, quum fuerit b major, quam a. Tunc enim poni debet $a - bb : a = -f$; adeoque æquatio ultimo reducta erit $zz = - af$, quæ conſtrui nequit.

Hic quoque in æquationum reductionibus inſtituendis Geometræ ſolertia debet locum ſuum habere. Ita, ſi habeatur $zz = aa + ab$, ſumi poterit $f = a + b$; & erit $zz = af$ æquatio reducta. Pariterque, ſi fuerit $zz = aa - bb$, fiat, tum $a + b = c$, cum $a - b = d$: ita, ut ſit $aa - bb = cd$; & habebitur loco ejus hæc alia $zz = cd$.

X. *Quorſum reducatur conſtructio problematum ſecundi generis, oſtenditur.*

X. Non itaque in dubium verti poteſt, quin omnia problemata ſecundi generis nullo negotio conſtruantur, ubi ſemel conſtructum eſt problema quod continet æquatio $xx = ab$. Et quoniam problema iſtud non aliud involvit, quam ut inter duas rectas datas media proportionalis inveniatur; liquet, *cuncta ſecundi generis problemata, per inventionem mediæ alicujus proportionalis, conſtrui poſſe.*

Interim, ſi in reſolutione alicujus problematis occurrat æquatio, in qua quadratum incognitæ x adæquet duo alia quadrata cognita; tunc longe facilius, per hypothenuſam dati alicujus trianguli rectanguli, poterit ipſius incognitæ valor deſignari. Ut, ſi habeatur $xx = aa + bb$, fiat triangulum rectangulum, cujus crus unum ſit a, & crus alterum b; eritque hypothenuſa ejuſdem trianguli rectanguli valor incognitæ x.

Nec

Digitized by Google

Nec item reticebimus, quod ſi æquatio, ex aliquo problemate orta, ejuſmodi ſit, ut in ea quadratum incognitæ *x* adæquet differentiam, quæ inter duo alia quadrata cognita deprehenditur; tunc deſignari queat valor ipſius incognitæ, per crus unum dati alicujus trianguli rectanguli. Ut, ſi habeatur $xx = aa - bb$, fiat triangulum rectangulum, cujus *a* ſit hypothenuſa, & *b* crus unum; eritque crus alterum valor incognitæ *x*.

Et ad conſtituendum quidem triangulum rectangulum, cujus data ſint crura; ſatis eſt, crura illa conjungere ad rectos angulos, tum eorum extrema per rectam aliam connectere. Sed, ut conſtruatur triangulum rectangulum, in quo data ſit hypothenuſa cum crure uno; oportet primo ſuper hypothenuſa, velut diametro, ſemicirculum deſcribere; tum in eo aptare crus datum, quod portionem ejus ſemicirculi ſubtendat; ac denique chordam ducere reliquæ portionis.

XI. Cæterum *in conſtructione problematum ſecundi generis reducendæ ſunt eorum æquationes ad formam illam ſimpliciſſimam, quo conſtructio ipſa uno circulo peragi poſſit.* Ut enim oſtenſum eſt, reductiones hic fiunt, per conſtructiones problematum primi generis, quæ rectis tantum abſolvuntur. Quare, reductione peracta, non alium circulum in conſtructione problematis oportebit aſſumere, quam qui pro mediæ proportionalis inventione omnino requiritur.

XI. *Cur æquationes aliorum problematum ſecundi generis ad formam illam ſimpliciſſimam ſunt reducendæ.*

Interim, ſi hanc nobis legem imponere nollemus, etiam abſque reductione unum-

Digitized by Google

quodque problema ſecundi generis conſtrui poterit. Sit enim $xx - 2ax = ab$ æquatio, ex reſolutione problematis orta. Capiatur locus ad rectam ſimpliciſſimus $y = c$. Quumque fiat $yy = cc$, habebitur additione locus ad circulum $yy + xx - 2ax = ab + cc$: qui tamen non aliter poteſt deſcribi, quam adhibito circulo alio; quum ſit $\sqrt{(aa + ab + cc)}$, hoc eſt media proportionalis inter a, & $a + b + cc : a$ radius ipſius.

Sit etiam $xx - 2ax + ab = o$ æquatio, ex reſolutione alicujus problematis nata. Capiatur quoque locus ad rectam ſimpliciſſimus $y = c$. Quumque habeatur $yy = cc$, ſive $yy - cc = o$; adhuc additione fiet locus ad circulum $yy + xx - 2ax + ab - cc = o$. Sed radius circuli hujus eſt $\sqrt{(aa - ab + cc)}$, hoc eſt media proportionalis inter a, & $a - b + cc : a$; nec proinde deſcribi poteſt, niſi circulus alter adhibeatur.

Juvat autem hoc loco notare, quod quemadmodum radices duæ æquationis $xx - 2ax + ab = o$ fiunt imaginariæ, quum ab major eſt, quam aa; ita ipſe etiam circulus impoſſibilis evadat, quotieſcumque in eadem hypotheſi $ab - aa$ major eſt, quam cc. Sed etſi, ob quantitatem c ad libitum ſumptam, eludere liceat circuli impoſſibilitatem; contradictionem tamen ex problemate nunquam delere licebit: enim vero, cujuſcumque valoris capiatur quantitas c, ſemper ea major erit, quam $\sqrt{(aa - ab + cc)}$.

XII. *Quomodo problema ſe-*

XII. Illud etiam nolo hic ſilentio preterire, quod *hoc artificio licebit interdum, proble-*

blema ſecundi generis dato etiam circulo conſtruere . Jam enim , aſſumpto loco ad rectam ſimpliciſſimo $y = c$, reperire licet , additionis ope, locum alium, qui ad circulum nos ducat. Quare non aliud ſupereſt , quam ut , comparatione inſtituta , inveniatur , quinam eſſe debeat valor aſſumptæ quantitatis c , quo compertus circulus poſſit datum illum nobis exhibere.

cundi generis dato circulo conſtrui poſſit, aperitur.

Sit ergo $xx - 2ax = ab$ æquatio , ex reſolutione alicujus problematis orta . Et oporteat, eam conſtruere mediante circulo, cujus radius ſit f. Capiatur locus ad rectam ſimpliciſſimus $y = c$. Quumque fiat $yy = cc$; erit additione $yy + xx - 2ax = ab + cc$ locus ad circulum . Jam radius hujus circuli eſt $\sqrt{(aa + ab + cc)}$. Quare, ut idem poſſit nobis circulum datum exhibere , oportebit , eſſe $f = \sqrt{(aa + ab + cc)}$, ſive etiam $ff = aa + ab + cc$. Unde erit $cc = ff - aa - ab$, & $c = \sqrt{(ff - aa - ab)}$.

Hinc, ut problema, contentum in æquatione $xx - 2ax = ab$, conſtrui poſſit mediante circulo, cujus radius ſit f, neceſſe eſt, ut locus ad rectam ſit $y = \sqrt{(ff - aa - ab)}$. Nam , quum habeatur $yy = ff - aa - ab$; fiet additione $yy + xx - 2ax = ff - aa$ locus ad circulum ; cujus radium eſſe f , liquet abunde . Sed perſpicuum eſt, conſtructionem iſtam non ſemper poſſibilem eſſe. Nam, ſi fuerit f minor , quam $\sqrt{(aa + ab)}$; quantitas $\sqrt{(ff - aa - ab)}$ fiet imaginaria ; adeoque locus ad rectam nullibi reperietur.

Eadem ratione , ſi æquatio problematis

ſit $xx - 2ax + ab = o$, & in ejus conſtru-ctione adhiberi velit circulus, cujus radius ſit a; fiet $y = \sqrt{ab}$ locus ad rectam. Nam, quum habeatur $yy = ab$, ſive $yy - ab = o$; erit additione $yy + xx - 2ax = o$ locus ad circulum; cujus radium eſſe a, nemo non videt. Hic autem locus ad rectam ſemper realis deprehenditur. Sed non ideo conſtructio problematis ſemper poſſibilis erit. Nam, ſi fuerit ab major quam aa, ſive etiam b major quam a; nulla erunt utriuſque loci puncta communia; adeoque problema contradictionem involvet.

LXIII. *Problematum ſecundi generis conſtructiones Carteſianæ afferuntur.*

XIII. Denique, ne aliquid hic miſſum faciamus, quod ſcitu ſit dignum, *ſubjungemus conſtructiones Carteſianas problematum ſecundi generis*. Itaque, ſi problematis æquatio induat formam, vel hujus $xx + ax - bb = o$, vel etiam iſtius $xx - ax - bb = o$, fiet conſtructio, formando prius angulum rectum ABC, in quo ſit $AB = b$, & $CB = a:2$; tum deſcribendo circulum ex puncto C, tamquam centro, & intervallo CB. Nam, ſi deinde jungatur AC, quæ circulo occurrat in punctis D, & E; erunt rectæ AD, AE valores duo incognitæ x.

FIG. 113.

Et in prima quidem æquatione $xx + ax - bb = o$, erit AD valor poſitivus, & AE valor negativus: enim vero, ſive ponatur $AD = x$, ſive $AE = -x$, ope trianguli rectanguli ABC, ſemper æquatio illa nobis ſuborietur. Viciſſim autem in ſecunda æquatione $xx - ax - bb = o$, erit AE valor poſitivus, & AD valor negativus; quum, beneficio

Digitized by Google

ficio ejuſdem trianguli rectanguli, reſtituatur nobis illiusmodi æquatio, ponendo AE $= x$, & AD $= -x$.

Quod ſi autem æquatio problematis ſit, vel hujus formæ $xx - ax + bb = o$, vel etiam iſtius $xx + ax + bb = o$; conſtruetur problema, ſi iiſdem ut ſupra peractis, ducatur recta ADE, parallela ipſi BC. Et hic quoque fient AD, AE valores incognitæ x: qui tamen erunt poſitivi, quum habetur $xx - ax + bb = o$; & viciſſim negativi, quum problematis æquatio eſt $xx + ax + bb = o$. FIG. 114.

In ſecundo hoc caſu nihil obſtat, quin recta ADE circulo non occurrat: nimirum ſi fuerit AB major, quam CB, hoc eſt b major, quam $a:2$. Sed, quum id contingit, ut nulla ſunt puncta occurſus, ſic problema impoſſibile erit. Fieri etiam poteſt, ut eadem recta ADE circulum tangat: ſcilicet, ſi fuerit $b = a:2$. Et tunc, coeuntibus in unum punctis D, & E, æquales fient inter ſe valores duo incognitæ x.

XIV. *Quod judicium ferri debeat de Carteſianis conſtructionibus, oſtenditur.*

XIV. Sed *quod judicium de hiſce Carteſianis conſtructionibus ferendum ſit, nec etiam ſubjicere gravabimur*. Quin eluceat in eis ſimplicitas, ac elegantia; non eſt dubitandum. Ea tamen ex formulis potius æquationum tota proficiſcitur: quæ profecto non amplius apparebit, ubi non formulæ, ſed ipſæ problematum æquationes, quæ ut plurimum compoſitæ eſſe ſolent, ad illas conſtructiones exiguntur.

Jam enim pro iis conſtructionibus duabus rectis opus eſt, ſcilicet tangente AB, & FI. 113. 114.

radio circuli CB. Ex his autem poſterior CB, quum ſemiſſem adæquet coefficientis ſecundi termini, ſemper per problema primi generis poteſt definiri. Sed, quantum ad priorem AB, raro quidem evenit, ut per problema ſecundi generis determinari non debeat; quum ejus quadratum ultimo æquationis termino ſit æquale.

Hinc Carteſianæ conſtructiones problematum ſecundi generis ponendæ ſunt inter eas, quas lubet admittere, etſi non uno circulo fiant. Qua autem ratione eas detexerit Auctor; id quidem minime nobis explicare dignatus eſt. Sed probabile eſt, in eas incidiſſe, conſiderando expreſſiones valorum, quos in ſingulis iis formulis habet incognita; quum non aliter earum veritatem oſtendat, quam quia rectæ illæ AD, AE eodem modo oriuntur expreſſæ.

Illud etiam nolo hic reticere, conſtructionibus ſuis Carteſium exhibuiſſe tantum valores poſitivos, & non item negativos. Iſtud autem vitio ei verti non debet. Nam, etſi, beneficio earundem conſtructionum, habeantur quoque valores negativi; eos tamen negligendos eſſe putavit; quia non adhuc oſtenderat, poſſe æquationes utriuſque generis valores admittere. Et inde pariter factum, ut conſtructio quartæ formulæ omnino apud ipſum omiſſa videatur.

CAP.

Digitized by Google

CAP. III.

Methodus conſtruendi problemata ſolida generatim oſtenditur.

1. SOlida problemata vocabant Veteres ea, quæ conſtrui non poſſunt, niſi adhibita aliqua coni ſectione. Talia autem, juxta Recentiorum diſtinctionem, *ſunt problemata illa, quæ ſive ad tertium, ſive ad quartum genus revocantur.* Debent ſiquidem hujuſmodi problemata per loca duo ſecundi generis conſtrui. Quare omnino neceſſe eſt, in eorum conſtructione aliquam coni ſectionem aſſumere. 1. *Quæ ſint problemata ſolida, juxta Recentiorum diſtinctionem, oſtenditur.*

Neque enim eſſe poteſt ad circulum uterque locus. Nam, etſi circulus ſit locus ſecundi generis, & per æquationem ſecundi gradus definiatur; ex duabus tamen æquationibus ad circulum, in quibus incognitæ eundem angulum continent, numquam licebit, æquationem determinatam eruere, quæ ad tertium, quartumve gradum aſcendat: nec proinde unquam poterit conſtructio problematis tertii, vel quarti generis interſectione duorum circulorum obtineri.

Ponamus etenim primo, incognitas duas in utroque ad circulum loco rectum angulum continere. Et quoniam in iſto caſu nequit in eorum æquationibus reperiri productum ip-

ſarum incognitarum; neceſſe eſt, ut eæ æquationes formas induant iſtarum $xx + yy .. ax .. by .. cc = o$, & $xx + yy .. dx .. fy .. gg = o$. Quare, exterminando unam incognitarum, nunquam poterit incognita alia ad tres, aut quatuor dimenſiones aſcendere.

Ponamus ſecundo, incognitas duas obliquum angulum continere, ita ut in æquationibus, loca ad circulum deſignantibus, reperiatur productum ipſarum incognitarum. Et quoniam obliquus ille angulus debet eſſe idem in utroque loco, induent eorum æquationes in hoc caſu, vel formas iſtarum $yy + mxy : n + mmxx : ss .. ax .. by .. cc = o$, & $yy + mxy : n + mmxx : ss .. dx .. fy .. gg = o$; vel harum, quæ ſequuntur, $yy - mxy : n + mmxx : ss .. ax .. by .. cc = o$, & $yy - mxy : n + mmxx : ss .. dx .. fy .. gg = o$. Unde, eliminata incognita una, nec etiam incognita alia ad tres, aut quatuor dimenſiones poterit attolli.

II. *Quod ex æquationibus problematum ſolidorum omnes ſpecies locorum ſecundi generis erui queunt.*

II. Non itaque in dubium verti poteſt, quin, juxta Recentiorum diſtinctionem, ea quidem problemata ſint ſolida, quæ tum ad tertium, cum ad quartum genus revocantur. Hujuſmodi autem problemata conſtruere licebit, tam duabus coni ſectionibus, quam circulo, & una coni ſectione. Sed præferendæ ſunt ſemper eæ conſtructiones, quas circulus ingreditur; quandoquidem circulus in plano longe facilius deſcribitur, quam quælibet ſectio coni.

Poteſt vero cum circulo conjungi quæcumque ſectio conica; quia ex æquationibus pro-

problematum ſolidorum omnes ſecundi generis locorum ſpecies erui poſſunt. Et quoniam, comparatis locis geometricis, naturæ problematum conſonis, conſtructiones ipſæ nullo negotio peraguntur; oſtendemus potiſſimum hoc capite, *qua ratione ex ſolidi alicujus problematis æquatione ſingulæ ſpecies locorum ſecundi generis colligi queant.*

Etſi autem æquationes problematum ſolidorum poſſint, tum ad tertium, cum ad quartum gradum attolli; nihilo tamen minus, quæ hic a nobis in exemplum afferentur, ad quatuor ſemper dimenſiones aſcendent. Id vero multum abeſt, ut difficultatem facere debeat. Nam, quum æquatio quarti gradus deprimatur ad tertium, ubi ultimus ejus terminus zero æqualis ſupponitur; conſiderari poterit æquatio tertii gradus velut alia quarti, poſtremo termino carens.

Potius diſcrimen fieri debet inter æquationes, ſecundo termino præditas, & eas, in quibus idem ille terminus deeſt. Nam longe aliter eruenda ſunt loca ſecundi generis, quum æquatio problematis ſolidi ſecundo termino caret, quam quum eodem illo termino eſt referta. Et quamquam facillimum ſit, delere ſecundum terminum ex quacumque æquatione; conſtruere tamen præparatione iſta problemata ſolida, non ſemper ſubinde facile deprehenditur.

III. Primo igitur oſtendemus, *quo pacto erui debeant ſpecies omnes locorum ſecundi generis ex æquatione problematis ſolidi, quæ ſecundo termino caret*. Hunc in finem ſit x^4 — *abxx*

III. *Quomodo eruenda ſint loca illa ex æquationibus, quæ ſecundo termi-*

ne carent. Exemplum primum.

$abxx + aacx - a^3d = 0$ æquatio iſta. Capiatur locus ad parabolam ſimpliciſſimus $xx = ay$, ſive $xx - ay = 0$. Quumque fiat $x^4 = aayy$; ſubſtitutione peracta, erit $aayy - abxx + aacx - a^3d = 0$, ſive etiam $yy - bxx : a + cx - ad = 0$, qui eſt locus ad hyperbolam, relate ad diametros conſideratam.

Ponatur deinde in æquatione iſta ad hyperbolam loco xx valor ejus ay; & habebitur hoc pacto æquatio altera ad parabolam $yy - by + cx - ad = 0$. Sed duabus hiſce æquationibus ad parabolam facillime poterit obtineri, tam locus ad circulum, ſi incognitæ duæ rectos angulos continent, quam locus ad hyperbolam æquilateram. Nam, addendo eas ſimul, fiet $xx + yy - ay - by + cx - ad = 0$, qui eſt locus ad circulum; ſubducendo vero unam ex alia, orietur $xx - yy - ay + by - cx + ad = 0$, qui eſt locus ad hyperbolam æquilateram.

Ellipſis porro, quæ deeſt, habebitur, ſi æquatio ad parabolam ſimpliciſſima $xx - ay = 0$ per fractionem aliquam cognitam multiplicetur. Sit enim $b : a$ fractio iſta. Jamque, multiplicatione peracta, fiet $bxx : a - by = 0$. Sed habetur quoque $yy - by + cx - ad = 0$. Quare, addendo ſimul duas iſtas æquationes, orietur tertia $yy - by - by + bxx : a + cx - ad = 0$, quæ proculdubio per ellipſim debet explicari.

Notetur hic autem, quod ſi ultimus æquationis terminus nihilo æqualis ſupponatur, tunc æquatio fiet tertii gradus, & loco ejus habebitur hæc alia $x^3 - abx + aac = 0$.

Un-

Digitized by Google

Unde, ſi iſta fuerit problematis æquatio, erunt relate ad eam $xx - ay = o$ locus ad parabolam; $yy - bxx : a + cx = o$ locus ad hyperbolam; $yy - by + cx = o$ locus alter ad parabolam; $xx + yy - ay - by + cx = o$ locus ad circulum; $xx - yy - ay + by - cx = o$ locus ad hyperbolam aliam æquilateram; & $yy - by - by + bxx : a + cx = o$ locus ad ellipſim.

IV. Sed, ut ejuſdem rei aliud exemplum afferamus, ſit $x^4 + abxx - aacx + a^3d = o$ *æquatio, orta ex reſolutione alicujus problematis ſolidi*. Capiatur quoque locus ad parabolam ſimpliciſſimus $xx = ay$, ſive $xx - ay = o$. Et quoniam habetur $x^4 = aayy$; ſubſtitutione peracta, erit $aayy + abxx - aacx + a^3d = o$, ſive etiam $yy + bxx : a - cx + ad = o$, qui eſt locus ad ellipſim. IV. *Exemplum ſecundum.*

Ponatur poſtea in æquatione iſta ad ellipſim loco xx valor ejus ay; & habebitur hoc pacto æquatio altera ad parabolam $yy + by - cx + ad = o$. Unde hic quoque, ſi duæ iſtæ æquationes ad parabolam ſimul addantur, fiet locus ad circulum $xx + yy - ay + by - cx + ad = o$; ſi vero una ex alia ſubducatur, orietur locus ad hyperbolam æquilateram $xx - yy - ay - by + cx - ad = o$.

Deeſt hic autem hyperbola non æquilatera; ſed facili negotio ea comparabitur, ſi æquatio ad parabolam ſimpliciſſima $xx - ay = o$ per datam aliquam fractionem multiplicetur. Sit enim $b : a$ fractio iſta. Jamque, multiplicatione peracta, fiet $bxx : a - by = o$. Sed habetur quoque $yy + by - cx + ad = o$.

Qua-

Quare, ſubductis a ſe mutuo duabus hiſce æquationibus, orietur tertia $yy + by + by - bxx : a - cx + ad = o$, quæ per hyperbolam non æquilateram debet explicari.

Etiam in hoc exemplo, ſi ultimus æquationis terminus nihilo æqualis ſupponatur, habebitur loco ejus hæc alia $x^3 + abx - aac = o$. Unde, ſi iſta fuerit problematis æquatio, erunt relate ad eam $xx - ay = o$ locus ad parabolam; $yy + bxx : a - cx = o$ locus ad ellipſim; $yy + by - cx = o$ locus alter ad parabolam; $xx + yy - ay + by - cx = o$ locus ad circulum; $xx - yy - ay - by + cx = o$ locus ad hyperbolam æquilateram; & $yy + by + by - bxx : a - cx = o$ locus ad hyperbolam aliam non æquilateram.

V. *Quomodo eruenda ſint eadem loca ex æquationibus, ſecundo termino præditis. Exemplum primum.*

V. Oſtendemus deinde, *qua ratione eruendæ ſint ſpecies omnes locorum ſecundi generis ex æquatione problematis ſolidi, in qua ſecundus terminus reperitur*. Hunc in finem ſit $x^4 + 2fx^3 - abxx + aacx - a^3d = o$ æquatio iſta. Capiatur locus ad parabolam paulo compoſitus $xx + fx = ay$, ſive $xx + fx - ay = o$. Quumque fiat $x^4 + 2fx^3 = aayy - ffxx$; ſubſtitutione peracta, erit $aayy - ffxx - abxx + aacx - a^3d = o$, ſive etiam $yy - ffxx : aa - bxx : a + cx - ad = o$, qui eſt locus ad hyperbolam, relate ad diametros conſideratam.

Ex eo autem, quod ſit $xx + fx = ay$, erit etiam $xx = ay - fx$. Unde in inventa æquatione ad hyperbolam poterit quoque loco xx valor ille ſubrogari. Plane vero manebit locus ſemper ad hyperbolam, ſi ſubſtitu-

tio

tio in uno tantum termino fiat. Nam erit $yy - ffy : a + f^3x : aa - bxx : a + cx - ad = 0$, ſi ſubſtituatur ille valor tantum in termino $ffxx : aa$; & $yy - ffxx : aa - by + bfx : a + cx - ad = 0$, ſi ſubſtitutio fiat dumtaxat in termino $bxx : a$. Sed ſi in utroque termino valor ille ſubrogetur; locus fiet ad parabolam, & erit $yy - ffy : a + f^3x : aa - by + bfx : a + cx - ad = 0$.

Compertis duobus locis ad parabolam, habebitur eorum additione locus ad circulum $xx + fx - ay + yy - ffy : a + f^3x : aa - by + bfx : a + cx - ad = 0$. Sed ſi eadem illa loca complicentur ſimul ſubtractione, orietur locus ad hyperbolam æquilateram $xx + fx - ay - yy + ffy : a - f^3x : aa + by - bfx : a - cx + ad = 0$. Unde non aliud ſupereſt, quam ut locum exhibeamus ad ellipſim, quem facillime reperire licebit, ſi termini omnes prioris æquationis ad parabolam per datam aliquam fractionem multiplicentur, tum ea cum altera ad parabolam æquatione conjungatur.

VI. Et ut aliud ejuſdem rei exemplum afferamus, *ſit* $x^4 - 2fx^3 + abxx - aacx + a^3d = 0$ *æquatio, orta ex reſolutione alicujus problematis ſolidi*. Capiatur quoque locus ad parabolam paulo compoſitus $xx - fx = ay$, ſive $xx - fx - ay = 0$. Et quoniam habetur $x^4 - 2fx^3 = aayy - ffxx$; ſubſtitutione peracta, erit $aayy - ffxx + abxx - aacx + a^3d = 0$, ſive etiam $yy - ffxx : aa + bxx : a - cx + ad = 0$: qui eſt locus ad parabolam, ſi ſit $ff = ab$; locus ad hyperbolam, ſi ſit ff major, quam ab; ac denique locus ad ellipſim, VI. *Exemplum ſecundum.*

pſim,

pſim, ſit ſit ff minor, quam ab.

Quum autem ſit $xx = ay + fx$; poterit in hac alia æquatione ſubrogari valor iſte loco ipſius xx. Et quidem, ſi ſubſtitutio fiat tantum in termino $ffxx:aa$; habebitur $yy - ffy:a - f^3x:aa + bxx:a - cx + ad = 0$, qui eſt locus ad ellipſim. Quod ſi vero fiat dumtaxat in termino $bxx:a$, orietur $yy - ffxx:aa + by + bfx:a - cx + ad = 0$, qui eſt locus ad hyperbolam. Et denique, ſi valor ille ſubſtituatur in utroque termino; æquatio fiet $yy - ffy:a - f^3x:aa + by + bfx:a - cx + ad = 0$, quæ ad parabolam nos ducet.

Compertis duobus ad parabolam locis, habebitur eorum additione locus ad circulum $xx - ay - fx + yy - ffy:a - f^3x:aa + by + bfx:a - cx + ad = 0$. Et, ſi eadem complicentur ſimul ſubtractione, orietur locus ad hyperbolam æquilateram $xx - ay - fx - yy + ffy:a + f^3x:aa - by - bfx:a + cx - ad = 0$. Poſſentque adhuc duo alia ad ellipſim, & hyperbolam loca reperiri, ſi multiplicatis terminis omnibus prioris æquationis ad parabolam per notam aliquam fractionem, eadem tum additionis, cum ſubtractionis ope cum altera ad parabolam æquatione complicetur.

VII. *Diſcrimen inter utramque loca eruendi rationem oſtenditur.*

VII. His igitur rationibus eruendæ ſunt ſpecies omnes locorum ſecundi generis ex æquationibus problematum ſolidorum. Nec difficile erit intelligere, *quale quidem ſit diſcrimen inter æquationes, ſecundo termino præditas, & eas, in quibus idem ille terminus deeſt*. Jam enim in utroque caſu debet

eſſe

Digitized by Google

eſſe ad parabolam locus, qui aſſumitur ab initio. Sed, quum æquatio ſecundo termino caret, referenda eſt parabola per ſuam æquationem ad axem ipſius; quum vero eodem illo termino eſt prædita, ad aliquam axis parallelam oportet referatur.

Neceſſe eſt autem, referre parabolam ad aliquam axis parallelam, quum adeſt in æquatione ſecundus terminus; ut, ſubſtitutione peracta, poſſit ex ipſa æquatione, tum primus, cum ſecundus terminus deleri. Atque hinc eſt, ut locus ad parabolam debeat eſſe $xx + fx = ay$, quum æquatio problematis eſt $x^4 + 2fx^3 - abxx + aacx - a^3d = 0$; & $xx - fx = ay$, quum eadem problematis æquatio eſt $x^4 - 2fx^3 + abxx - aacx + a^3d = 0$. Nam aliter, ſubſtitutionis ope, priores duo æquationis termini deleri non poterunt.

Delendi ſunt porro, per locum ad parabolam, qui aſſumitur, priores duo æquationis termini; ut aliæ locorum ſecundi generis ſpecies non ita compoſitæ oriantur. Si enim, exiſtente $x^4 + 2fx^3 - abxx + aacx - a^3d = 0$ problematis æquatione, capiatur locus ad parabolam $xx - ay = 0$; ſubſtitutionis ope habebitur, tum $yy + 2fxy : a - bxx : a + cx - ad = 0$, cum $yy + 2fxy : a - by + cx - ad = 0$, quorum uterque eſt locus ad hyperbolam.

Et, ſi multiplicatis terminis æquationis ad parabolam per fractionem aliquam indeterminatam $m : a$, conjungatur eadem cum æquatione $yy + 2fxy : a - by + cx - ad = 0$; orietur hæc alia æquatio $yy + 2fxy + mxx : a$

$- by$

$-by - my + cx - ad = o$, quæ, pro vario valore ipſius m, ad omnes coni ſectiones, tum item ad circulum, ſi duæ incognitæ obliquum angulum continent, nos ducere poterit. Sed perſpicuum eſt, omnes haſce æquationes caſus valde compoſitos locorum ſecundi generis continere.

VIII. *Quod constructio problematum ſolidorum fieri poſſit, data parabola.*

VIII. Ne aliquid hic omittamus, quod ad rem faciat, *illud quoque ſedulo notari debet*, quod etſi, in eruendis locis ſecundi generis ex æquatione problematis ſolidi, capi debeat ab initio locus ad parabolam; parameter tamen ejus parabolæ haud quidem datæ alicujus longitudinis eſſe debet, ſed ad libitum poteſt aſſumi. Unde, etſi in allatis exemplis aſſumpta fuerit quantitas a pro parametro ejus parabolæ; attamen, ſi alia quælibet quantitas tale munus obiret, adhuc eaſdem locorum ſpecies eruere liceret.

Poterit ergo, ut parabolæ parameter aſſumi, indeterminata aliqua quantitas. Et tunc ipſe locus, non ad unam, ſed ad infinitas parabolas erit. Quumque eadem quantitas indeterminata omnes alias locorum ſpecies, quæ deinceps eruuntur, ingrediatur; perſpicuum eſt, etiam loca iſta infinitis prope modis poſſe explicari. Interim, ut conſtructio problematis, quantum fieri poteſt, ſimplex oriatur; præſtat, ut parametrum aſſumere quantitatem illam, quæ vel in ſingulis æquationis terminis, vel in maxima eorum parte reperitur.

Capiendo autem indefinite parabolæ parametrum, licebit deinceps, conſtruere pro-

Digitized by Google

problema per parabolam, cujus parameter ſit data; quum non aliud fieri debeat, quam loco ejus inderminatæ quantitatis parametrum datam ſubſtituere. Et, quamquam eadem indeterminata quantitas reperiatur quoque, tum in loco ad circulum, cum in loco ad hyperbolam æquilateram; nihilominus, ſi ope ejus fieri velit, ut datus ſit alteruter horum locorum, non aliter, quam per problema ſolidum, id poterit obtineri.

Sit enim $x^4 - abxx + aacx - a^3d = o$ æquatio problematis. Capiatur indefinite locus ad parabolam ſimpliciſſimus $xx = my$, ſive $xx - my = o$. Et, methodo tradita, fiet $xx + yy - my - aby : m + aacx : mm - a^3d : mm = o$ locus ad circulum. Jam radius hujus circuli eſt $\surd(a^4cc:4m^4 + mm:4 + ab:2 + aabb:4mm + a^3d : mm)$. Quare, ſi fuerit r radius circuli dati, oportebit eſſe $r = \surd(a^4cc : 4m^4 + mm: 4 + ab : 2 + aabb : 4mm + a^3d : mm)$. Unde infertur æquatio ſexti gradus, derivativa tertii, $m^6 - 4rrm^4 + 2abm^4 + aabbmm + 4a^3dmm + a^4cc = o$. Et par eſt ratio, ſi data eſſe debeat hyperbola æquilatera.

IX. Non deeſt interim methodus, qua mediante, *ſolius Geometriæ planæ præſidio, fieri poſſit, ut ſive locus ad circulum, ſive locus ad hyperbolam æquilateram ſit datus*. Sit enim rurſus $x^4 - abxx + aacx - a^3d = o$ æquatio problematis. Fiat primo $x = az : m$, adeo ut per ſubſtitutionem migret æquatio illa in hanc aliam $a^4z^4 : m^4 - a^3bzz : mm + a^3cz : m - a^3d = o$; ſive etiam $z^4 - bmmzz : a + cm^3z : a - dm^4 : a = o$. Jamque, ſi deinde ca-

IX. *Quomodo eadem conſtructio peragi queat, vel dato circulo, vel data hyperbola æquilatera.*

capiatur locus ad parabolam ſimpliciſſimus $zz - my = 0$, fiet methodo ſuperius tradita $zz + yy - my - bmy : a + cmz : a - dmm : a = 0$ locus ad circulum.

Hujus autem circuli radius eſt $\surd(ccmm : 4aa + mm : 4 + bmm : 2a + bbmm : 4aa + dmm : a)$. Quare, ſi fuerit r radius circuli dati, oportebit eſſe $r = \surd(ccmm : 4aa + mm : 4 + bmm : 2a + bbmm : 4aa + dmm : a)$. Unde, quum habeatur $rr = ccmm : 4aa + mm : 4 + bmm : 2a + bbmm : 4aa + dmm : a$, ſive etiam $4aarr = ccmm + aamm + 2abmm + bbmm + 4admm$; fiet $mm = 4aarr : (cc + aa + 2ab + bb + 4ad)$, & $m = 2ar : \surd(cc + aa + 2ab + bb + 4ad)$.

Iiſdem porro manentibus, locus ad hyperbolam æquilateram erit $zz - yy - my + bmy : a - cmz : a + dmm : a = 0$. Et quoniam ſemiaxis hujus hyperbolæ eſt $\surd(mm : 4 - bmm : 2a + bbmm : 4aa - ccmm : 4aa + dmm : a)$; ſi utique vocetur f ſemiaxis hyperbolæ datæ, erit $f = \surd(mm : 4 - bmm : 2a + bbmm : 4aa - ccmm : 4aa + dmm : a)$. Quare, quum habeatur $ff = mm : 4 - bmm : 2a + bbmm : 4aa - ccmm : 4aa + dmm : a$; fiet $mm = 4aaff : (aa - 2ab + bb - cc + 4ad)$, & $m = 2af : \surd(aa - 2ab + bb - cc + 4ad)$.

Notetur hic vero, quod ſi fuerit cc major, quam $aa - 2ab + bb + 4ad$, tunc valor ipſius m prodibit imaginarius. Sed quum id contingit, explicandus eſt locus per hyberbolas conjugatas. Sic enim ſemiaxis erit $\surd(ccmm : 4aa - mm : 4 + bmm : 2a - bbmm : 4aa - dmm : a)$. Unde habebitur $m = 2af : \surd(cc - aa + 2ab - bb - 4ad$.

Fieri

Fieri etiam poteſt, ut ſit $cc = aa - 2ab + bb + 4ad$. Et tunc valor ejuſdem m fiet infinitus. Verum in hoc caſu, quum habeatur $ad = cc:4 - aa:4 + ab:2 - bb:4$, æquatio evadet $x^4 - abxx + aacx - aacc:4 + a^4:4 - a^3b:2 + aabb:4 = 0$, quæ non erit in propria ſua ſede; quum dividi poſſit in haſce duas ſecundi gradus $xx + ax - ac:2 + aa:2 - ab:2 = 0$, & $xx - ax + ac:2 + aa:2 - ab:2 = 0$.

X. *Quomodo etiam abſolvenda, vel per datam ellipſim, vel per datam hyperbolam non æquilateram.*

X. Sed non abs re erit hoc loco ſubjungere, *quid factu ſit opus, ut problema conſtrui poſſit, vel per datam ellipſim, vel per hyperbolam non æquilateram datam*. Sane determinatio harum curvarum ex duplici capite oritur; primo nempe ex axis longitudine; tum ex ratione, quam habet axis ad ſuam parametrum. Unde, ut id, quod quæritur, poſſit obtineri; oportebit, duas quidem indeterminatas quantitates in illiuſmodi locis contineri.

Sit ergo rurſus $x^4 - abxx + aacx - a^3d = 0$ problematis æquatio; & poſito $x = az:m$, transformetur iterum ea in hanc aliam $z^4 - bmmzz:a + cm^3z:a - dm^4:a = 0$. Capiatur adhuc locus ad parabolam ſimpliciſſimus $zz - my = 0$. Jamque, ſi ponatur my loco zz, & $mmyy$ loco z^4; habebitur locus alter ad parabolam $mmyy - bm^3y:a + cm^3z:a - dm^4:a = 0$, ſive etiam $yy - bmy:a + cmz:a - dmm:a = 0$.

Multiplicetur deinde prior locus ad parabolam per fractionem indeterminatam $n:a$, ita ut habeatur $nzz:a - nmy:a = 0$. Et ſiquidem

idem iſte locus complicetur, tam additione, quam ſubtractione, cum altero ad parabolam loco $yy - bmy : a + cmz : a - dmm : a = o$; habebitur additione quidem locus ad ellipſim $nzz : a + yy - nmy : a - bmy : a + cmz : a - dmm : a = o$; ſubtractione vero locus ad hyperbolam non æquilateram $nzz : a - yy - nmy : a + bmy : a - cmz : a + dmm : a = o$.

Quum itaque in utroque horum locorum duæ indeterminatæ quantitates contineantur; facile quidem erit, iis mediantibus, unumquemque eorundem locorum ſubinde determinare, ut exhibeat, vel datam ellipſim, vel datam hyperbolam non æquilateram. Nam, quemadmodum indeterminata m uſui nobis eſſe debet, ut ellipſis, aut hyperbola datum habeat axem; ſic indeterminata altera n inſerviet nobis, ut idem ille axis ad ſuam parametrum datam habeat rationem.

XI. *Oſtenditur exemplo, quomodo fieri poſſit, ut data ſit, vel ellipſis, vel hyperbola non æquilatera.*

XI. Et, *ne ullus ſuperſit dubitandi locus*, videamus primo, quomodo æquatio ad ellipſim $nzz : a + yy - nmy : a - bmy : a + cmz : a - dmm : a = o$ illiuſmodi determinationem ſuſcipere poſſit. Nimirum in ea ratio axis ad parametrum eſt æqualis ei, quam habet n ad a; tum item ipſa axis longitudo eſt $2\sqrt{(bbmm : 4aa + bnmm : 2aa + nnmm : 4aa + ccmm : 4an + dmm : a)}$. Quare, ſi in data ellipſi ſit axis ad parametrum, ut r ad s, & $2f$ longitudo ipſius axis; erit, tum $n : a = r : s$, cum $f = \sqrt{(bbmm : 4aa + bnmm : 2aa + nnmm : 4aa + ccmm : 4an + dmm : a)}$. Unde infertur $n = ar : s$, & $m = 2afs\sqrt{r} : (bbrss + 2abrrs + aar^3 + ccs^3 + 4adrss)$.

Oſten-

Oſtendamus deinde, quomodo æquatio ad hyperbolam $nzz:a - yy - nmy:a + bmy:a - cmz:a + dmm:a = 0$ eandem illam determinationem ſubire queat. Nimirum in ea ratio axis ad parametrum eſt æqualis ei, quam habet n ad a; tum item eſt $2\surd(bbmm:4aa - bnmm:2aa + nnmm:4aa - ccmm:4an + dmm:a)$ ipſa axis longitudo. Quare, ſi in data hyperbola ſit axis ad parametrum, ut r ad s, & $2f$ longitudo ipſius axis; erit, tum $n:a = r:s$, cum $f = \surd(bbmm:4aa - bnmm:2aa + nnmm:4aa - ccmm:4an + dmm:a)$. Unde eruitur $n = ar:s$, & $m = 2afs\surd r:\surd(bbrss - 2abrrs + aar^3 - ccs^3 + 4adrss)$.

Fieri autem hic poteſt, ut ſit ccs^3 major, quam $bbrss - 2abrrs + aar^3 + 4adrss$. Et tunc, ne valor ipſius m prodeat imaginarius, explicandus eſt locus per hyperbolas conjugatas; quia ſic erit $m = 2afs\surd r:\surd(ccs^3 - bbrss + 2abrrs - aar^3 - 4adrss)$. Sed nihil vetat, quin habeatur quoque $ccs^3 = bbrss - 2abrrs + aar^3 + 4adrss$. Et in iſto caſu, ſicuti valor ipſius m evadit infinitus, ſic nec etiam in propria ſede erit æquatio, de qua agitur, $x^4 - abxx + aacx - a^3d = 0$. Nam, quum fiat $ad = ccs:4r - bb:4 + abr:2s - aarr:4ss$; habebitur loco ejus hæc alia $x^4 - abxx + aacx - aaccs:4r + aabb:4 - a^3br:2s - a^4rr:4ss = 0$, quæ quidem dividitur in duas haſce ſecundi gradus $xx + ax\surd(r:s) - ac\surd(s:4r) + aar:2s - ab:2 = 0$, & $xx - ax\surd(r:s) + ac\surd(s:4r) + aar:2s - ab:2 = 0$.

XII. Ex duobus itaque locis geometricis, quibus conſtructio problematis ſolidi fieri debet, XII. *Quod ellipſis, aut hy-*

perbola non æquilatera aſſumi poſſit ſimilis tantum alteri datæ.

bet, nihil obſtat, quin unus quandoque ſit datus. Sed, ſi eadem conſtructio duobus datis locis peragi vellet; id ſane tantum non impoſſibile foret. Plane vero, *ſi ellipſis, aut hyperbola non æquilatera deberet eſſe ſimilis dumtaxat alteri datæ; tunc data etiam eſſe poſſet, vel parabola, vel circumferentia circuli, vel hyperbola æquilatera*; quandoquidem, ad adſtruendam ſimilitudinem illam, nonniſi unica quantitas indeterminata requiritur.

Dicuntur quippe duæ ellipſes, aut duæ hyperbolæ non æquilateræ ſimiles inter ſe, quotieſcumque eadem in utraque eſt ratio axis ad parametrum. Unde, non aliud exigit quæſita illa ſimilitudo, quam ut axis ad parametrum datam habeat rationem. Profecto autem, ope datæ hujus rationis, tam in loco ad ellipſim, quam in loco ad hyperbolam non æquilateram, dumtaxat determinatur valor ipſius n. Quare, quum maneat indeterminata alia m; licebit, ope hujus, efficere, ut data ſit, vel parabola, vel circumferentia circuli, vel hyperbola æquilatera.

Obiter autem notetur hoc loco velim, de ſimilitudine ſectionum conicarum fuse egiſſe Apollonium in libro ſexto ſuorum conicorum; & præter definitionem ejus ſimilitudinis, quam ipſe Apollonius ibidem aſſumpſit, plures alias, a ſubſequentibus Geometris excogitatas, paſſim circumferri. Hujuſmodi argumentum, velut parum utile, in noſtris hiſce Elementis omiſimus omnino. Sed, ſi de eo agendum eſſet, poſthabitis aliorum de-

Digitized by Google

definitionibus, vocarem libenter *ſimiles coni ſectiones, quæ ex uno, eodemque cono per plana parallela erui poſſunt.*

Ex hac vero definitione ultro liquet, parabolas omnes debere eſſe ſimiles inter ſe; quum omnes, quot quot fuerint, poſſint per plana parallela ex eodem cono deduci. Patetque etiam, tam ellipſes, quam hyperbolas tunc demum eandem ſimilitudinem ſortiri, quotieſcumque eadem in iis eſt ratio axis ad parametrum. Nam, ob eandem iſtam rationem, licebit quidem, eas eruere ex uno, eodemque cono per plana æquidiſtantia.

XIII. Meretur interim, *ut ſpeciatim hoc loco oſtendatur*, quod ſi duarum ellipſium, aut hyperbolarum axes eandem habeant rationem ad ſuas parametros; omnino neceſſe ſit, ut etiam diametri, quæ æqualiter ad ſuas ordinatas inclinantur, eandem ſervent rationem cum parametris ſuis. Hunc in finem ſint AM, *am* duæ iſtæ ellipſes, aut hyperbolæ, quæ ita quidem diſponantur, ut habeant, tum commune centrum C, cum axes AB, *ab* ſibi mutuo coincidentes.

XIII. Ellipſium, & hyperbolarum ſimilium ſpecialis quædam proprietas demonſtratur.

Fi. 115. 116.

Ducatur ex centro C recta quævis CE, ſecans utramque earum curvarum in punctis E, & *e*. Tum ex punctis iſtis demittantur ad axes ordinatæ EG, *eg*. Et quoniam in utraque curva eadem eſt ratio axis ad parametrum; erit, ut rectangulum AGB ad EG quadratum, ita rectangulum *agb* ad *eg* quadratum. Sed EG quadratum eſt ad CG quadratum, ut *eg* quadratum ad *Cg* quadratum. Itaque erit ordinando, ut rectangulum AGB ad

CG quadratum, ita rectangulum *agb* ad Cg quadratum.

Hinc erit pariter, ut CA quadratum ad CG quadratum, ita *Ca* quadratum ad Cg quadratum; ſive etiam, ut CA ad CG, ita *Ca* ad *Cg*. Et permutando erit quoque, ut CA ad *Ca*, ita CG ad *Cg*. Sed CG eſt ad *Cg*, ut CE ad *Ce*. Quare erit ex æquali, ut CA ad *Ca*, ita CE ad *Ce*: & propterea duabus iis ellipſibus, aut hyperbolis illud etiam accidet, ut omnis recta, quæ ad eas ducitur ex centro C, ſecetur ab ipſis in data ratione.

Extendatur jam recta CE ad partem alteram verſus F, ita ut EF, *ef* ſint duæ earundem curvarum diametri; ſitque porro AM ordinata una diametri EF. Et quoniam, juncta CM, fit, ut CM ad *Cm*, ita CA ad *Ca*; erit *am* ipſi AM parallela. Sed, ob AM biſectam in O, etiam *am* biſecatur in *o*. Quare erit *am* ſimiliter ordinata una ipſius *ef*: proindeque duæ diametri EF, *ef* æqualiter ad ſuas ordinatas inclinabuntur.

Denique, quum in eadem ratione ipſarum CA, *Ca* ſit, tam CE ad *Ce*, quam CO ad *Co*; proportionalia erunt quadrata, quæ fiunt ex ipſis CE, CO, *Ce*, *Co*. Unde erit quoque, ut rectangulum EOF ad CO quadratum, ita rectangulum *eof* ad *Co* quadratum. Sed CO quadratum eſt ad AO quadratum, ut *Co* quadratum ad *ao* quadratum. Quare erit ordinando, ut rectangulum EOF ad AO quadratum, ita rectangulum *eof* ad *ao* quadratum: & propterea diametri EF, *ef* ad parametros ſuas eandem rationem habebunt.

CAP.

Digitized by Google

CAP. IV.

Elegantiores problematum ſolidorum conſtructiones exhibentur.

I. *Quod cum circulo conjungi debeat vel parabola, vel ellipſis, ut problematis conſtructio ſimplex, ac facilis oriatur.*

I. VIdimus præcedenti capite, ex æquationibus problematum ſolidorum omnes ſecundi generis locorum ſpecies eruere licere: Inde autem abunde liquet, conſtructiones eorundem problematum, tam duabus coni ſectionibus, quam circulo, & una coni ſectione peragi poſſe. Sed, ut ibidem innuimus, præferendæ ſunt eæ conſtructiones, quas circulus ingreditur; quum circulus in plano longe facilius deſcribatur, quam quælibet ſectio coni.

Quamquam vero cum circulo conjungi poſſit quæcumque ſectio conica; non omnis tamen ſectio coni, unita circulo, elegantiorem nobis ſuppetit problematis cōſtructionem: Unde, quia in conſtruendis problematibus, non modo vitandæ ſunt eæ conſtructiones, quæ naturæ problematum conſonæ non ſunt, ſed in id etiam ſedulo incumbendum, ut faciliores, ſimplicioreſque eligantur; illud jam oportet inquiramus, *quæ coni ſectio cum circulo ſit conjungenda, ut problematis conſtructio, quoad fieri poteſt, elegans oriatur.*

Hunc in finem meminiſſe oportet, facilitatem, ſimplicitatemque conſtructionis geome-

me-

Digitized by Google

metricæ generaliter ex duplici capite æſtimari debere; primo nempe ex faciliore ratione, qua lineæ, loca terminantes, deſcribuntur; & ſecundo ex ſimpliciore apparatu, quo opus eſt, pro determinatione earundem linearum. Hinc enim fit, ut ſectio conica, cum circulo conjungenda, eſſe debeat ellipſis, ſi deſcriptionis facilitas conſideretur; parabola vero, ſi ſimplicior eam determinandi ratio inſpiciatur.

Primo ſiquidem dubitari non poteſt, quin ex conicis ſectionibus ellipſis ſit illa, quam paulo facilius in plano deſcribere licet. Nam, ubi ad ejus deſcriptionem foci adhibentur, deſcribitur eadem fere facilitate, qua circulus ipſe delineatur. Et deinde nec etiam in dubium verti poteſt, quin ex curvis omnibus, quæ ex æquatione problematis ſolidi eruuntur, parabola ſit ea, quæ ſimpliciore apparatu determinatur. Nam liquet, ejus æquationem non eſſe adeo compoſitam, quemadmodum æquationes aliarum curvarum.

Hæc quum ita ſint, duo nobis hoc capite præſtanda ſunt. Primo enim oportet oſtendamus, qua ratione problemata ſolida parabola, & circulo conſtruantur. Deinde explicandum nobis erit, quo pacto eorundem problematum conſtructiones ellipſi, & circulo peragi debeant. Et quamquam, ad hæc oſtendenda, exemplis primum utemur ſpecialibus; deinceps tamen non gravabimur, ad regulas generales rem omnem revocare.

II. *Quomodo problemata*

II. Ut igitur oſtendamus primo loco, *qua ratione problemata ſolida parabola, & circulo*

ſolida parabola, & circulo conſtruantur, quum eorum æquationes ſecundo termino carent. Exemplum.

lo conſtruantur, ſit primum $x^4 - abxx + aacx - a^3d = 0$ problematis æquatio; quæ ſecundo termino caret. Sumpto itaque loco ad parabolam ſimpliciſſimo $xx - ay = 0$; fiet methodo ſuperius tradita $xx + yy - ay - by + cx - ad = 0$ locus ad circulum. Unde duobus hiſce locis conſtructio problematis eſt peragenda, quo parabola, & circulo conſtrui poſſit.

Fig. 117.

Sit ergo poſitione data recta quævis AB. Et quoniam æquatio ad parabolam eſt $xx - ay = 0$; deſignandi ſunt per portiones ejus valores incognitæ y. Unde, erecta ſuper ea perpendiculari AC; fient huic æquidiſtantes valores alterius incognitæ x: proindeque, abſciſſa ex AC portione AD $= a$; oportebit, eam deſcribere, axe quidem AB, parametro vero AD.

Ad circulum vero quod attinet, quia ipſius æquatio eſt $xx + yy - ay - by + cx - ad = 0$, invenietur centrum ejus; abſcindendo ex AB, tum AE $= a : 2$, cum EF $= b : 2$; & capiendo ſuper AC ad partem oppoſitam AG $= c : 2$. Nam, completo deinde parallelogrammo rectangulo FG, fiet H centrum quæſitum.

Radius porro ejuſdem circuli eſt $\sqrt{(aa : 4 + ab : 2 + bb : 4 + cc : 4 + ad)}$. Unde, quum propter triangulum rectangulum AFH ſit AH $= \sqrt{(aa : 4 + ab : 2 + bb : 4 + cc : 4)}$; ſi erigatur ſuper AH perpendicularis AI $= \sqrt{ad}$, fiet HI $= \sqrt{(aa : 4 + ab : 2 + bb : 4 + cc : 4 + ad)}$; adeoque circulus deſcribendus erit centro H, & intervallo HI.

De-

Digitized by Google

Deſcribatur itaque hujuſmodi circulus. Et ſiquidem ex punctis, in quibus idem parabolæ occurrit, perpendiculares demittantur ſuper AB; dabunt eæ valores, quos habet incognita x in æquatione $x^4 - abxx + aacx - a^3d = 0$. Nec dubium eſſe poteſt, quin occurſus fieri debeat in totidem punctis, quot ſunt valores illi. Nam, ſi quæratur æquatio, definiens eum occurſum; non alia nobis ſeſe offeret, quam illa ipſa, de qua agitur; $x^4 - abxx + aacx - a^3d = 0$.

Quum ergo hujus æquationis tres radices ſint poſitivæ, & una negativa; fiet occurſus in quatuor punctis, quorum tria erunt in portione AX, & unum in portione AZ. Quumque duæ ex radicibus poſitivis poſſint quandoque, vel æquales fieri, vel etiam imaginariæ; hinc etiam eſt, ut ex tribus punctis, in quibus circulus ſecat portionem AX, duo interdum, vel in unum coire queant, vel nullibi etiam reperiri.

III. *Conſtructio præcedentis exempli ad omnes caſus extenditur.*

III. Neque vero difficile erit, *ſpecialem iſtam conſtructionem ad omnes caſus extendere, ſuamq; ei univerſalitatem conciliare.* Quæcumque enim ſit æquatio quarti gradus, ſecundo termino carens; per conſtructiones problematum primi generis, fieri ſemper poteſt, ut ſit ab coefficiens tertii termini, aac coefficiens quarti, & a^3d ultimus terminus. Quare, nulla habita ſignorum ratione, poterunt æquationes omnes quarti gradus, quæ ſecundo termino carent, exhiberi per iſtam $x^4 \ldots abxx \ldots aacx \ldots a^3d = 0$.

Hinc, ſi quæ mutatio facienda ſit in con-

ſtru-

ſtructionibus aliarum æquationum, ea ex diverſitate ſignorum, quibus affici poſſunt ipſarum termini, tota proficiſcitur. Quare, ſicuti in allato exemplo, ubi erat — *abxx*, portio EF = *b*: 2 ſumpta eſt in directum cum AE; ſic capienda erit ad partem oppoſitam, quum habetur + *abxx*. Atque ita quoque, quemadmodum in eodem exemplo, ubi erat + *aacx*, portio AG = *c*: 2 ſumpta eſt ad partem alteram rectæ AC; ſic oportebit, eam ſumere ſuper ipſa AC, quum habetur — *aacx*. Fig. 117.

Non perinde autem ſe res habet, ſi ultimus æquationis terminus a^3d ſigno + afficiatur. Tunc enim haud quidem ducenda erit AI = $\sqrt{ad}$ ad plagam oppoſitam; ſed oportebit, talem ei poſitionem tribuere, ut angulus HIA rectus oriatur. Nec obſcura eſt hujus rei ratio. Nam, ſicuti quadratum radii circuli deſcribendi eſt æquale ſummæ quadratorum, quæ fiunt ex ipſis AH, AI, quum ultimus æquationis terminus afficitur ſigno —; ſic ejuſdem radii quadratum æquale fiet differentiæ eorum quadratorum, quum idem ultimus terminus ſigno + affectus reperitur.

Fieri autem poteſt, ut in æquatione non omnes ii termini reperiantur. Et tunc nullæ evadunt rectæ illæ, quæ per coefficientes deficientium terminorum definiuntur. Sic, deficiente tertio termino *abxx*, nulla fiet ipſa EF; adeoque punctum F accedet ad E. Pariterque, deficiente quarto termino *aacx*, ad nihilum reducetur ipſa AG, ſive FH: unde punctum H coincidet cum puncto F. Et quoniam, quum deeſt ultimus terminus a^3d,

æqua-

æquatio deprimitur ad tertium gradum; liquet, circulum deſcribendum eſſe centro H, & intervallo HA, quotieſcumque æquatio problematis eſt $x^3 \,..\, abx \,..\, aac = o$.

IV. *Quomodo eadem problemata ſint conſtruenda parabola, & circulo, quum eorum æquationes ſecundum terminum habent. Exemplum.*

IV. Sit deinde $x^4 + 2fx^3 - abxx + aacx - a^3d = o$ *problematis æquatio, in qua ſecundus terminus reperitur*. Capiatur locus ad parabolam paulo compoſitus $xx + fx - ay = o$. Et, methodo ſuperius tradita, fiet $xx + fx - ay + yy - ffy : a + f^3x : aa - by + bfx : a + cx - ad = o$ locus ad circulum. Unde duobns hiſce locis conſtructio problematis fieri debet, quo parabola, & circulo conſtrui poſſit.

Fig. 118.

Deſignentur itaque per portiones rectæ AB valores incognitæ y. Tum, erecta ſuper ea perpendiculari AC, ſint huic æquidiſtantes valores alterius incognitæ x. Et quoniam æquatio ad parabolam eſt $xx + fx - ay = o$; perſpicuum eſt, quod ſi ad partem alteram ipſius AC capiatur AD $= f : 2$, & ducta per punctum D recta EF, ipſi AB parallela, fiat DE $= ff : 4a$, debeat eſſe EF axis parabolæ, & EG $= a$ parameter ejus.

Quantum vero ad circulum, quia ipſius æquatio eſt $xx + fx - ay + yy - ffy : a + f^3x : aa - by + bfx : a + cx - ad = o$, invenietur centrum ejus, abſcindendo ſucceſſive ex AB primo AH $= ff : 2a$, tum HI $= a : 2$, ac denique IK $= b : 2$; nec non capiendo ad partem alteram ipſius AC itidem ſucceſſive, non modo AD $= f : 2$, verum etiam DL $= f^3 : 2aa$, LO $= bf : 2a$, & OR $= c : 2$. Nâm, completo deinde rectangulo KR, fiet S centrum quæſitum. Ra-

Radius porro ejuſdem circuli eſt $\surd(f^4 : 4aa + ff : 2 + aa : 4 + bff : 2a + ab : 2 + bb : 4 + ff : 4 + f^4 : 2aa + f^6 : 4a^4 + bff : 2a + bf^4 : 2a^3 + bbff : 4aa + cf : 2 + cf^3 : 2aa + cbf : 2a + cc : 4 + ad)$. Unde, quum propter triangulum rectangulum AKS ſit $AS = \surd(f^4 : 4aa + ff : 2 + aa : 4 + bff : 2a + ab : 2 + bb : 4 + ff : 4 + f^4 : 2aa + f^6 : 4a^4 + bff : 2a + bf^4 : 2a^3 + bbff : 4aa + cf : 2 + cf^3 : 2aa + cbf : 2a + cc : 4)$; ſi erigatur ſuper AS perpendicularis $AV = \surd ad$, fiet SV radius quæſitus; adeoque circulus deſcribendus erit centro S, & intervallo SV.

Deſcribatur ergo hujuſmodi circulus. Et ſiquidem ex punctis, in quibus idem parabolæ occurrit, perpendiculares demittantur ſuper AB, dabunt eæ valores, quos habet incognita x in æquatione $x^4 + 2fx^3 - abxx + aacx - a^3d = 0$. Nec dubium eſſe poteſt, quin occurſus fieri debeat in totidem punctis, quot ſunt valores illi. Nam, ſi quæratur æquatio, definiens eum occurſum; non alia nobis ſeſe offeret, quam illa ipſa, de qua agitur $x^4 + 2fx^3 - abxx + aacx - a^3d = 0$.

V. Conſtructio præcedentis exempli ad ſuam univerſalitatem revocatur.

V. Sed facile quoque erit, *ſpecialem iſtam constructionem ad ſuam univerſalitatem revocare, eandemque ad omnes alios caſus extendere.* Quæcumque enim ſit æquatio quarti gradus, ſecundo termino prædita; per conſtructiones problematum primi generis, fieri ſemper poteſt, ut ſit $2f$ coefficiens ſecundi termini, ab coefficiens tertii, aac coefficiens quarti, & a^3d ultimus terminus. Quare, nulla habita ſignorum ratione, poterunt æquationes omnes quarti gradus, quæ ſecundum terminum

Digitized by Google

num continent, exhiberi per iſtam $x^4 \,..\, 2fx^3 \,..\, abxx \,..\, aacx \,..\, a^3d = o$.

Hinc, ſi quæ mutatio facienda ſit in conſtructionibus aliarum æquationum, ea ex diverſitate ſignorum, quibus affici poſſunt ipſarum termini, tota proficiſcitur. Qualis autem eſſe debeat hæc mutatio, haud difficile erit intelligere. Nimirum primo portiones
Fig. duæ $AD = f : 2$, & $DL = f^3 : 2aa$ ſumendæ
118. ſunt ſuper ipſa AC, quum habetur $- 2fx^3$. Secundo portio $IK = b : 2$ capienda eſt ad plagam oppoſitam, quum fuerit $+ abxx$. Tertio portionem $LO = bf : 2a$ oportet ſumere ex L verſus A, quum termini duo $2fx^3$, $abxx$ iiſdem ſignis ſunt affecti. Quarto portio OR $= c : 2$ ſumenda eſt ad partem contrariam, quum habetur $- aacx$. Ac denique ipſa AV $= \surd ad$ ſubinde aptanda eſt ſuper AS, ut rectus ſit angulus SVA, quum fuerit $+ a^3d$.

Hic quoque, ſi deſit in æquatione terminus aliquis, nulla evadit recta illa, quæ per coefficientem ejus termini definitur. Et inde duo conſequuntur, notatu digna. Primum eſt, quod hujuſmodi conſtructio recidat in eam, quæ paulo ante allata eſt, quotieſcumque deeſt in æquatione ſecundus terminus $2fx^3$; quandoquidem, per defectum hujus termini, non modo evaneſcit AD, ſed nullæ quoque fiunt, tam duæ DL, LO, quam duæ DE, AH. Alterum eſt, quod ſi æquatio problematis ſit $x^3 \,..\, 2fxx \,..\, abx \,..\, aac = o$, circulus deſcribi debeat centro S, & intervallo SA. Nam æquatio, de qua agitur, $x^4 \,..\, 2fx^3 \,..\, abxx \,..\, aacx \,..\, a^3d = o$ non aliter abit

abit in eam, quam deficiente ultimo termino a^3d : quo caſu ipſa AV $= \sqrt{ad}$ nulla fiat oportet.

VI. Oſtenſo, qua ratione problemata ſolida parabola, & circulo conſtruantur, videamus nunc, *quo pacto eorundem problematum conſtructio ellipſi, & circulo peragi debeat*. Hunc in finem referat rurſus $x^4 - abxx + aacx - a^3d = o$ problematis æquationem, quæ ſecundo termino caret. Jamque, ſi capiatur locus ad parabolam ſimpliciſſimus $xx - ay = o$; habebitur ſubſtitutione locus alter ad parabolam $yy - by + cx - ad = o$. Et, quemadmodum iſtorum additione oritur locus ad circulum $xx - ay + yy - by + cx - ad = o$; ita ſi prior ad parabolam æquatio multiplicetur per fractionem $b : a$, fiet etiam additione $bxx : a - by + yy - by + cx - ad = o$ locus ad ellipſim. VI. *Quomodo problemata ſolida ellipſi, & circulo conſtruantur, quum eorum æquationes ſecundo termino carent. Exemplum.*

Sit nunc AB recta illa, per cujus portiones deſignantur valores incognitæ y. Et, erecta ſuper ea perpendiculari AC, ſint huic æquidiſtantes valores alterius incognitæ x. Quia ergo locus ad circulum eſt $xx - ay + yy - by + cx - ad = o$; oportebit, ut ſupra, primo quidem abſcindere ex AB, tam AE $= a : 2$, quam EF $= b : 2$; deinde vero ad partem alteram ipſius AC ſumere AG $= c : 2$. Nam, completo poſtea rectangulo FG, & erecta ſuper AH perpendiculari AI $= \sqrt{ad}$; fiet H centrum ejus, & HI radius ejuſdem. FIG. 119.

Quantum vero ad ellipſim, quum ejus æquatio ſit $bxx : a - by + yy - by + cx - ad = o$; neceſſe eſt pariter, primo quidem ex

Digitized by Google

AB abſcindere, tum AK $= b : 2$, cum KL $= b : 2$; deinde vero ad plagam oppoſitam ipſius AC ſumere AO, quæ ſit ad AG, ut eſt a ad b. Nam, completo poſtea rectangulo LO, ſumptiſque ſuper RO hinc inde a puncto R portionibus RP, RQ talis longitudinis, ut cujuſque quadratum ſit æquale quadratis AL, AI una cum quadrato alio, quod ſit ad AO quadratum, ut eſt b ad a; fiet R centrum ejus, PQ axis ejuſdem, & ratio axis ad parametrum æqualis ei, quam habet b ad a.

Deſcribatur itaque, tum ille circulus, cum iſta ellipſis. Et ſiquidem ex punctis, in quibus ſibi mutuo occurrunt, perpendiculares demittantur ſuper AB; dabunt eæ valores, quos habet incognita x in æquatione $x^4 - abxx + aacx - a^3d = 0$. Nec in dubium verti poteſt, quin occurſus fieri debeat in totidem punctis, quot ſunt valores illi. Nam, ſi invenienda proponatur æquatio, per quam occurſus ille definitur, non alia nobis ſeſe offeret, quam ipſa illa, de qua agitur, $x^4 - abxx + aacx - a^3d = 0$.

VII. *Quod ellipſis, in præcedenti constructione aſſumpta, poſſit eſſe infinitarum ſpecierum, & conſequenter in parabolam verti.*

VII. Non hic ſubjungam, quo pacto ſpecialis iſta conſtructio ad ſuam univerſalitatem ſit revocanda; quum facile id intelligi poſſit ex iis, quæ paulo ante dicta ſunt de conſtructionibus, quæ parabola, & circulo fiunt. Potius loco ejus notari hic poterit, *ellipſim, in conſtructione problematis aſſumptam, pro multiplici valore ipſius b, poſſe eſſe infinitarum ſpecierum*. Et quamquam hac ratione in circulum pariter poſſit abire; non hinc tamen duobus circulis problema conſtruere licet

cet; quum non aliter verti queat in circulum, quam ubi fuerit $b = a$: quo caſu rurſus prior circulus oritur.

Quum autem parabola, velut ſpecies quædam ellipſis, conſiderari poſſit; omnino neceſſe eſt, ut in allata conſtructione contineatur ea, quæ parabola, & circulo perficitur. Et ſane fiet locus huic conſtructioni, ubi quantitas b infinita ſupponitur. Tunc enim, Fi. 119.
quemadmodum, ob infinitam longitudinem 117.
ipſius AK, in infinitum abit centrum ellipſis; ſic axis ejus PQ coincidet cum AB, ob rectam AO, quæ evaneſcit, & ad nihilum reducitur. Quumq; in eadem hypotheſi æquales fiant duæ RO, RP, coincidet etiam punctum P cum puncto A; adeoque, non modo ellipſis vertetur in parabolam, ſed erit quoque A vertex parabolæ principalis, AB axis ejus, & recta AD $= a$ parameter axis.

Illud etiam reticendum hoc loco non eſt, quod ſi æquatio problematis ſit $x^3 - abx + aac = o$; tunc ſatis erit in ea, de qua agitur, $x^4 - abxx + aacx - a^3d = o$ delere ultimum terminum a^3d. Et quoniam, deleto iſto termino, nulla evadit recta AI $= \sqrt{ad}$; duo hinc conſequuntur, notatu digna. Primum eſt, quod circulus deſcribi debeat centro H, & intervallo HA. Alterum, quod portiones RP, RQ, quæ ſuper RO ſumuntur hinc inde a puncto R, debeant eſſe talis longitudinis, ut cujuſque quadratum ſit æquale quadrato ex AL una cum quadrato alio, quod ſit ad AO quadratum, ut eſt b ad a.

VIII. Quomodo

VIII. Sit ulterius $x^4 + 2fx^3 - abxx +$

eadem problemata ellipſi, & circulo ſint conſtruenda, quum eorum æquationes ſecundum terminum habent.

$aacx - a^3d = 0$ *æquatio problematis, ellipſi & circulo conſtruendi*. In ea, ut vides, adeſt ſecundus terminus. Quare capiendus eſt locus ad parabolam paulo compoſitus $xx + fx - ay = 0$; eritque ſubſtitutione $yy - ffy:a + f^3x:aa - by + bfx:a + cx - ad = 0$ locus alter ad parabolam. Unde, quemadmodum eorum additione fit locus ad circulum $xx + fx - ay + yy - ffy:a + f^3x:aa - by + bfx:a + cx - ad = 0$; ita, ſi prior ad parabolam æquatio multiplicetur per fractionem $b:a$, habebitur etiam additione locus ad ellipſim $bxx:a + fbx:a - by + yy - ffy:a + f^3x:aa - by + bfx:a + cx - ad = 0$.

FIG. 120. Sit jam AB recta, per cujus portiones deſignantur valores incognitæ y. Et, erecta ſuper ea perpendiculari AC, ſint huic æquidiſtantes valores alterius incognitæ x. Quia ergo locus ad circulum eſt $xx + fx - ay + yy - ffy:a + f^3x:aa - by + bfx:a + cx - ad = 0$; oportebit, ut ſupra, primo quidem ex AB abſcindere ſucceſſive AH $= ff:2a$, HI $= a:2$, & IK $= b:2$; deinde vero ad partem alteram ipſius AC ſumere itidem ſubſecutive AD $= f:2$, DL $= f^3:2aa$, LO $= bf:2a$, & OR $= c:2$. Nam, completo poſtea rectangulo LR, & erecta ſuper AS perpendiculari AV $= \sqrt{ad}$; fiet S centrum ejus, & SV radius ejuſdem.

Quantum vero ad ellipſim, quum ejus æquatio ſit $bxx:a + fbx:a - by + yy - ffy:a + f^3x:aa - by + bfx:a + cx - ad = 0$; neceſſe eſt pariter, primo quidem ex AB abſcindere, HT $= b:2$, & TX $= b:2$; deinde vero

ro

ro ex DR, producta ſi opus, auferre portionem DZ, quæ ſit ad DR, ut eſt a ad b. Nam, completo poſtea rectangulo XZ, ſumptiſque ſuper YZ hinc inde a puncto Y portionibus YP, YQ talis longitudinis, ut cujuſque quadratum ſit æquale quadratis AX, AV una cum quadrato alio, quod ſit ad AZ quadratum, ut eſt b ad a; fiet Y centrum ejus, PQ axis ejuſdem, & ratio axis ad parametrum æqualis ei, quam habet b ad a.

Deſcribatur itaque, tum ille circulus, cum iſta ellipſis. Et ſiquidem ex punctis, in quibus ſibi mutuo occurrunt, perpendiculares demittantur ſuper AB; dabunt eæ valores, quos habet incognita x in æquatione $x^4 + 2fx^3 - abxx + aacx - a^3d = 0$. Nec ulli dubium eſſe poteſt, quin occurſus fieri debeat in totidem punctis, quot ſunt valores illi. Nam, ſi quæratur æquatio, per quam occurſus ille definitur, & aſſumatur velut incognita perpendicularis, quæ exinde demittitur ſuper AB, non alia nobis ſeſe offeret, quam ipſa illa, de qua agitur, $x^4 + 2fx^3 - abxx + aacx - a^3d = 0$.

IX. Nec etiam hic ſubjungemus, qua ratione ſpecialis iſta conſtructio ad omnes caſus ſit extendenda; quum ſimiliter intelligere id liceat ex iis, quæ ſuperius dicta ſunt de conſtructionibus, quæ parabola, & circulo fiunt. Meretur autem, ut hic quoque notetur, *ellipſim, in conſtructione problematis aſſumptam, pro multiplici valore ipſius b, poſſe eſſe infinitarum ſpecierum*. Et quamquam hac ratione poſſit pariter in circulum abire; non

IX. *Quod in hac etiam conſtructione ellipſis aſſumpta poſſit eſſe infinitarum ſpecierum, atque adeo in parabolam verti.*

hinc tamen duobus circulis problema conſtruere licet; quum non aliter verti queat in circulum, quam ubi fuerit $b = a$: quo caſu rurſus prior circulus oritur.

Ob eandem rationem neceſſe eſt, ut in allata conſtructione contineatur ea, quæ parabola, & circulo perficitur; quum parabola, velut ſpecies quædam ellipſis, poſſit conſiderari. Ei autem ſit locus, quum quantitas b in-
Fi. 120. finita ſupponitur. Tunc enim, quemadmodum,
118. ob infinitam longitudinem ipſius HT, in infinitum abit centrum ellipſis; ſic axis ejus PQ coincidet cum recta EF, ducta per punctum D ipſi AB æquidiſtanter, ob rectam DZ, quæ evaneſcit, & ad nihilum reducitur. Quumque, ſumpta ſuper EF portione $DE = ff : 4a$, coincidat in eadem hypotheſi punctum P cum puncto E; non modo ellipſis vertetur in parabolam, ſed erit quoque E vertex parabolæ principalis, EF axis ejus, & recta $EG = a$ parameter axis.

Hic vero non ita liquido patet, quod punctum P coincidere debeat cum puncto E, quotieſcumque quantitas b infinita ſupponitur. Quare, ne dubium ullum ſuperſit, oſtendemus illud in hunc modum. Quoniam habetur $AX = ff : 2a + b : 2 + b : 2$, & $AZ = f : 2 + f^3 : 2ab + ff : 2b + ac : 2b$; utique, ſuppoſita b infinita, fiet $AX = b : 2$, & $AZ = f : 2$. Sed ex conſtructione, YP quadratum eſt æquale quadratis AX, AV una cum quadrato alio, quod ſit ad AZ quadratum, ut eſt b ad a. Quare, poſita $PZ = t$; erit $tt + tb + bb : 4 = bb : 4 + ad + ffb : 4a$; hoc eſt $tt + tb$

$= ad$

$= ad + ffb : 4a$; ſive etiam, ob b infinitam, $tb = ffb : 4a$: & propterea erit PZ $= t = ff : 4a$. Unde, quum ſit etiam DE $= ff : 4a$, omnino neceſſe eſt, ut accedente PQ ad ipſam EF, cadat punctum P ſuper punctum E.

Illud quoque notandum hoc loco eſt, quod ſi æquatio problematis ſit $x^3 + 2fxx - abx + aac = 0$; tunc ſatis erit in ea, de qua agitur, $x^4 + 2fx^3 - abxx + aacx - a^3d = 0$ delere ultimum terminum a^3d. Et quoniam, deleto iſto termino, nulla evadit recta AV $= \sqrt{ad}$; duo hinc conſequuntur, notatu digna. Primum eſt, quod circulus deſcribi debeat centro S, & intervallo SV. Alterum, quod portiones YP, YQ, quæ ſuper YZ ſumuntur hinc inde a puncto Y, debeant eſſe talis longitudinis, ut cujuſque quadratum ſit æquale quadrato ex AX una cum quadrato alio, quod ſit ad AZ quadratum, ut eſt b ad a.

X. Cæterum, etſi conſtructiones problematum ſolidorum, quæ hyperbola, & circulo fiunt, ob rationes ſuperius allatas, non ſint comparandæ cum iis, quæ ſive circulo, & parabola, ſive circulo, & ellipſi peraguntur; attamen, ſi eæ velint adhiberi, *poterit locus ad hyperbolam eodem fere artificio reperiri, quo invenitur locus ad ellipſim*; hoc eſt, multiplicando per fractionem aliquam priorem locum ad parabolam, tum eum ſubducendo ex loco altero, qui etiam ad parabolam nos ducit.

X. *Quomodo inveniendus eſt locus ad hyperbolam, quum hyperbola, & circulo problemata ſolida ſunt conſtruenda.*

Ita, ſi $x^4 - abxx + aacx - a^3d = 0$ ſit problematis æquatio, ſumpto loco ad parabolam ſimpliciſſimo $xx - ay = 0$, fiet ſubſtitutione $yy - by + cx - ad = 0$ locus alter

ter ad parabolam. Unde, quemadmodum additione horum locorum habebitur locus ad circulum $xx - ay + yy - by + cx - ad = o$; ita, ſi prior ad parabolam æquatio $xx - ay = o$ multiplicetur per fractionem $b : a$, orietur ſubtractione locus ad hyperbolam $yy - by + by - bxx : a + cx - ad = o$.

Similiter, ſi $x^4 + 2fx^3 - abxx + aacx - a^3d = o$ ſit æquatio problematis, ſumpto loco ad parabolam paulo compoſito $xx + fx - ay = o$, habebitur ſubſtitutione locus alter ad parabolam $yy - ffy : a + f^3x : aa - by + bfx : a + cx - ad = o$. Unde, ſicuti additione iſtorum locorum oritur locus ad circulum $xx + fx - ay + yy - ffy : a + f^3x : aa - by + bfx : a + cx - ad = o$; ita, ſi prior ad parabolam æquatio $xx + fx - ay = o$ multiplicetur per fractionem $b : a$, fiet ſubtractione $yy - ffy : a - by + by - bxx : a - bfx : a + f^3x : aa + bfx : a + cx - ad = o$ locus ad hyperbolam.

Sed hic quoque notare oportet, quod hujuſmodi hyperbola, pro multiplici valore ipſius b, poſſit eſſe infinitarum ſpecierum. Speciatim vero erit æquilatera, ſi fuerit $b = a$. Et quoniam parabola conſiderari poteſt velut ſpecies quædam hyperbolæ; omnino neceſſe eſt, ut in conſtructione, quæ hyperbola, & circulo perficitur, contineatur ea, quæ circulo, & parabola peragitur: quemadmodum revera abit in illam, quotieſcumque ipſa quantitas b infinita ſupponitur.

XI. *Quomodo haberi poteſt*

XI. Hyperbola vero ſub contemplationem hic venit relate ad aliquam ejus diame-

trum

trum. Sed quid, *ſi adhiberi velit, in ordine ad ſuas aſymptotos conſiderata?* Plane, quum æquatio problematis eſt tertii gradus, ſive trium dimenſionum, inter alia loca, quæ tradita methodo exinde eruuntur, ille etiam reperitur, qui ad hyperbolam nos ducit, relate ad ipſius aſymptotos conſidratam. Unde facile erit, ope ejus, problematis conſtructionem exhibere.

locus ad hyperbolam, relate ad ſuas aſymptotos conſideratam.

Sit enim primo $x^3 - abx + aac = o$ problematis æquatio. Capiatur locus ad parabolam ſimpliciſſimus $xx = ay$. Et quoniam, multiplicata utraque ejus parte per x, fit $x^3 = axy$; erit ſubſtitutione $axy - abx + aac = o$, ſive etiam $xy - bx + ac = o$: quæ quidem æquatio non aliter, quam per hyperbolam, relate ad ſuas aſymptotos conſideratam, poteſt explicari.

Sit etiam $x^3 + 2fxx - abx + aac = o$ æquatio, ex problemate nata. Capiatur adhuc locus ad parabolam paulo compoſitus $xx + fx = ay$. Quumque, multiplicata utraque ejus parte per x, fiat $x^3 + fxx = axy$; erit ſubſtitutione $axy + fxx - abx + aac = o$, ſive etiam $xy + fxx : a - bx + ac = o$: quæ ſane æquatio per hyperbolam, utroque modo conſideratam, poteſt explicari.

Quod ſi autem æquatio problematis ſit quatuor dimenſionum; tunc tradita methodo numquam ex ea erui poterit locus ad hyperbolam, relate ad ſuas aſymptotos conſideratam. Verum, ſi æquatio ſubinde transformetur, ut ultimus ejus terminus ſit quadratum perfectum, & afficiatur etiam ſigno $+$; licebit circulum, & hyperbolam reperire in

hunc

Digitized by Google

hunc, qui ſequitur, modum.

Sit $x^4 + 2fx^3 - abxx - aacx + aadd = 0$ hujuſcemodi problematis æquatio. Capiatur locus ſimpliciſſimus ad hyperbolam, relate ad aſymptotos conſideratam, $xy = ad$. Et quoniam fit, tum $x = ad : y$, cum $xx = aadd : yy$; erit ſubſtitutione $aaddxx : yy + 2aaddfx : yy - a^3bdd : yy - a^3cd : y + aadd = 0$. Quare, reducta æquatione iſta, habebitur locus ad circulum $xx + 2fx - ab - acy : d + yy = 0$.

XII. *Cur occurſus locorum fieri debet in totidem punctis, quot valores in æquatione problematis habet incognita.*

XII. Illud jam ſupereſt, ut paulo clarius hic explicemus, cur omnino opus ſit, ut *occurſus duorum locorum, quibus problema conſtruitur, fiat in totidem punctis, quot valores in ejus æquatione habet incognita.* Nam, quod ſæpius ſupra dictum eſt, id exinde oriri, quia æquatio, per quam occurſus ille definitur, ab ipſa problematis æquatione non differt, etſi veriſſimum ſit; rem tamen non adeo luculenter oſtendit, ut omnis dubitandi ratio remota videatur.

Propria ergo ejus rei ratio repeti debet ex illo Algebræ principio, quod æquatio, ex reſolutione alicujus problematis nata, radicibus ſuis omnes ejus problematis caſus nobis oſtendat. Inde enim fit, ut æquatio, qua duarum linearum occurſus definitur, debeat per ſuas radices puncta omnia exhibere, in quibus occurſus ille contingit. Unde omnino neceſſe eſt, ut occurſus duorum locorum, quibus problema conſtruitur, fiat in totidem punctis, quot valores in ejus æquatione habet incognita; quum eadem problematis æqua-

quatione etiam occurſus ille definiatur.

Quod autem æquatio, definiens occurſum duorum locorum, quibus problema conſtruitur, non differat ab ipſa problematis æquatione; id notius eſt, quam ut poſſit in dubium revocari. Invenienda eſt enim æquatio illa per conditiones, quæ ſeorſim in utroque loco continentur. Unde, quum iſtæ conditiones ſint illæ eædem, quæ ſimul in problemate reperiuntur; oportebit, eam invenire per ipſas problematis conditiones: proindeque omnino neceſſe eſt, ut non differat ab æquatione, ad quam problema ipſum revocatur; quum ex iiſdem conditionibus utraque æquatio erui debeat.

Ex eo porro, quod æquatio, definiens duarum linearum occurſum, debeat radicibus ſuis puncta omnia exhibere, in quibus occurſus ille contingit, perſpicuum eſt, non melius intelligi poſſe, in quot punctis duarum linearum occurſus fiat, quam quærendo æquationem, per quam illiuſmodi occurſus definitur. Unde, quod nimio labore oſtendit Apollonius libro quarto ſuorum Conicorum de numero punctorum, in quibus aliqua ſectio coni convenire poteſt, vel cum circumferentia circuli, vel cum alia coni ſectione; ope ejus principii, facili quidem negotio demonſtrare licebit.

Nimirum æquatio, definiens occurſum, ſive duarum coni ſectionum, ſive circumferentiæ circuli, & unius conicæ ſectionis, regulariter ad quatuor dimenſiones aſcendit. Unde non plura, quam quatuor, poterunt eſ-

Digitized by Google

ſe puncta ejus occurſus. Sed duo quævis horum punctorum poſſunt, vel in unum coire, vel nullibi etiam reperiri: ſi ſcilicet radices, iis correſpondentes, vel æquales fiant, vel etiam evadant imaginariæ. Et quoniam, quum coeunt in unum, abeunt in punctum contactus; hinc eſt, ut eædem curvæ in pluribus, quam duobus, punctis nequeant ſe mutuo contingere.

C A P. V.

Conſtructio problematum ſolidorum plenius expenditur.

I. *Quod problemata quarti generis conſtrui poſſint mediantibus iis, quæ genus tertium conſtituunt.*

1. UBi de conſtructione egimus problematum planorum, ad rem viſum fuit oſtendere, ad quos terminos conſtructiones eoum poſſint revocari. Eadem autem ratione non abs re erit, hic etiam aperire, quorſum conſtructio problematum ſolidorum proprie reducatur. Id vero ut commodius exequi valeamus, præſtat prius advertere, quod *problemata quarti generis facillimum ſit conſtruere mediantibus iis, quæ tertium genus conſtituunt*.

Sunt quippe problemata quarti generis, quorum æquationes ad quatuor dimenſiones aſcendunt; ſunt vero problemata tertii generis, quorum dimenſiones ad tres tantum dimenſiones aſſurgunt. Unde conſtabit, priora problemata poſſe iſtorum beneficio conſtrui, ſi utique oſtendi poſſit, quod quælibet æquatio

quar-

quarti gradus ad aliam trium dimenſionum deprimi queat.

Id autem demonſtravit primus omnium Raphael Bombellius. Et facillime illud idem oſtendere licebit in hunc modum. Sit $x^4 - abxx + aacx - a^3d = o$ æquatio quarti gradus. Supponatur ea orta ex multiplicatione iſtarum ſecundi gradus $xx - yx + ff = o$, & $xx + yx - gg = o$. Jamque, iis per ſe mutuo multiplicatis, fiet $x^4 - yyxx + ffxx - ggxx + ffyx + ggyx - ffgg = o$ ejuſdem naturæ cum æquatione propoſita.

Comparentur itaque ſimul, & ex mutua terminorum collatione habebitur $yy - ff + gg = ab$, $ffy + ggy = aac$, & $ffgg = a^3d$. Hinc, quum ſit $gg + ff = aac : y$, & $gg - ff = ab - yy$; erit $2gg = aac : y + ab - yy$, $2ff = aac : y - ab + yy$, & $4ffgg = a^4cc : yy - aabb + 2abyy - y^4$. Sed habetur quoque $4ffgg = 4a^3d$. Itaque erit $4a^3d = a^4cc : yy - aabb + 2abyy - y^4$, ſive etiam $y^6 - 2aby^4 + aabbyy + 4a^3dyy - a^4cc = o$, quæ eſt æquatio ſexti gradus, derivativa tertii.

Verum quidem eſt, quod æquatio quarti gradus aſſumpta ſit carens ſecundo termino. Sed id difficultatem facere non debet; quum facillimum ſit ex æquationibus delere ſecundum terminum. Qua autem ratione æquatio quarti gradus $x^4 - abxx + aacx - a^3d = o$ cenſenda ſit reducta ad hanc aliam cubicam $y^6 - 2aby^4 + aabbyy + 4a^3dyy - a^4cc = o$; facile quidem erit intelligere: nimirum, quia cognito valore incognitæ y, innoteſcet quoque valor incognitæ x.

Jam

Digitized by Google

Jam enim habetur, tum $ff = aac : 2y - ab : 2 + yy : 2$, cum $gg = aac : 2y + ab : 2 - yy : 2$. Quare ex duabus iis æquationibus ſecundi gradus $xx - yx + ff = 0$, & $xx + yx - gg = 0$, ex quarum multiplicatione concipitur orta æquatio, de qua agitur, $x^4 - abxx + aacx - a^3d = 0$, prior fiet $xx - yx + aac : 2y - ab : 2 + yy : 2 = 0$, & poſterior $xx + yx - aac : 2y + ab : 2 - yy : 2 = 0$: proindeque, cognito valore incognitæ y, facile erit iis mediantibus invenire quatuor valores, quos habet incognita x in æquatione propoſita.

II. *Quorſum reducatur conſtructio problematum tertii generis, quorum æquationes ſunt ſimpliciſſimæ.*

II. Quum ergo problemata quarti generis facili negotio conſtruantur per ea, quæ tertium genus conſtituunt; ſatis erit, inquirere, *quorſum conſtructio problematum tertii generis reducatur*. Et ſimplicior quidem æquatio, quæ ex aliquo horum problematum poteſt oriri, eſt $x^3 = aac$. Ei autem ſit ſatis per primam duarum medio loco proportionalium inter a, & c. Nam, ſi iſta vocetur x, fiet altera $xx : a$; adeoque, quum ſit, ut a ad x, ita $xx : a$ ad c, erit $x^3 : a = ac$, ſive etiam $x^3 = aac$.

Nec aliter fiet ſatis problemati, ſi æquatio ejus ſit $x^3 = - aac$. Tum enim duæ mediæ proportionales inveniendæ ſunt inter a, & $-c$; & adhuc prima ipſarum valorem exhibebit incognitæ x. Nam, vocando x primam duarum medio loco proportionalium inter a, & $-c$; fiet altera $xx : a$. Unde, quum ſit, ut a ad x, ita $xx : a$ ad $-c$; erit $x^3 : a = - ac$, ſive etiam $x^3 = - aac$, quæ eſt ipſa problematis æquatio.

Sed

Digitized by Google

Sed notare oportet hoc loco, valorem incognitæ x oriri poſitivum, quum æquatio problematis eſt $x^3 = aac$; & viciſſim negativum, quum eadem æquatio eſt $x^3 = - aac$. Conſtabit id autem facili negotio, ſi regulis, præcedenti capite traditis, utrumque problema conſtruatur. Patebit enim, occurſum locorum, quibus conſtructio peragitur, fieri ex parte radicum poſitivarum, quum habetur $x^3 = aac$; & ex parte radicum negativarum, quum per contrarium eſt $x^3 = - aac$.

Hoc idem repeti quoque poteſt ex ipſo criterio, quo magnitudines proportionales dignoſcuntur. Ut enim vidimus in noſtris Algebræ Elementis dicendæ ſunt proportionales quatuor magnitudines, quotieſcumque quicquid efficitur ab uno antecedentium, ut conſequentem ſuum adæquet, id omne fieri debet ab alio antecedente, ut adæquet quoque ſuum conſequentem. Unde, non aliter inter magnitudines diverſi ſtatus proportio ſubſiſtere poteſt, quam ſi ſervantes legem proportionis, qua quantitates, duæ fuerint unius ſtatus, & aliæ duæ ſtatus oppoſiti.

Hinc autem prono alveo fluit, ut duarum medio loco proportionalium inter a, & $- c$ prima debeat eſſe negativa, & ſecunda poſitiva. Debent enim in iis magnitudinibus, velut continue proportionalibus, tres analogiæ diſtingui. Nam, non modo neceſſe eſt, ut prima ſit ad ſecundam, veluti eſt tertia ad quartam; ſed oportet quoque, ut tam prima ſit ad ſecundam, veluti eſt ſecunda ad tertiam; quam ſecunda ad tertiam, veluti eſt tertia ad quar-

quartam. Profecto autem non aliter omnes iſtæ analogiæ ſubſiſtere queunt, quam ſi duarum mediarum proportionalium prima ſit negativa, & ſecunda poſitiva.

Atque hinc etiam ratio repeti poteſt, cur problema planum ſit impoſſibile, quum ejus æquatio eſt $xx = -ab$. Pro eo enim invenienda eſſet inter a, & $-b$ una media proportionalis. Sed cujuſcumque ſtatus ea capiatur, numquam efficere licet, ut in ipſa analogia duo termini ſint poſitivi, & alii duo negativi. Plane vero media proporionalis inter a, & b poteſt eſſe, tum poſitiva, cum negativa. Nam, ſicuti in priore caſu omnes analogiæ termini fiunt poſitivi; ſic in ſecundo duo erunt unius ſtatus, & alii duo ſtatus oppoſiti.

III. *Quomodo reddi poſſint ſimpliciſſimæ æquationes aliorum problematum tertii generis.*

III. Quemadmodum autem per inventionem duarum mediarum proportionalium fit ſatis problemati, cujus æquatio eſt, vel $x^3 = aac$, vel $x^3 = -aac$; ſic *eodem artificio omnia alia problemata tertii generis conſtruere liceret, ſi eorum æquationes ad formas illas ſimpliciſſimas poſſent revocari*. Fieri vero id facile poteſt, quum æquatio problematis ſecundo, & tertio termino caret. Nam, ſi habeatur, exempli gratia, $x^3 = aab + acc - bcd$; capiendo $f = b + cc : a - bcd : aa$, fiet utique $x^3 = aaf$.

Sed non perinde ſe res habet, ſi in æquatione problematis, vel ſecundus, vel tertius, vel etiam uterque terminus reperiatur. Tunc enim in id primo incumbendum, ut, remotis ab æquatione illiuſmodi terminis, pura

ra reddatur, & ab omni affectione immunis æquatio ipſa. Et quamquam, delere ſecundum terminum, facillimum ſit; non eſt tamen peræque facile, ſubinde etiam auferre terminum tertium, ut iterum ſecundus non oriatur.

Obtineri interim id poteſt ſequenti ratione. Sit $x^3 + abx - aac = 0$ æquatio cubica, tertio termino prædita. Ponatur $x = y + z$. Et quoniam habetur, tum $x^3 = aac - abx$, cum $x^3 = y^3 + 3yyz + 3yzz + z^3$; erit $aac - abx = y^3 + 3yyz + 3yzz + z^3$. Sed, multiplicata per $3yz$ utraque parte æquationis $x = y + z$, fit etiam $3yzx = 3yyz + 3yzz$. Quare, ſubſtitutionis ope, erit $aac - abx = y^3 + 3yzx + z^3$.

Ponatur porro, quod ſit $aac = y^3 + z^3$. Quumque fiat $-abx = 3yzx$, erit $-ab = 3yz$: unde infertur $z = -ab : 3y$, & $z^3 = -a^3b^3 : 27y^3$. Hinc, rurſus per ſubſtitutionem, erit $aac = y^3 - a^3b^3 : 27y^3$, hoc eſt $y^6 - aacy^3 = a^3b^3 : 27$, ſive etiam $y^6 - aacy^3 + a^4cc : 4 = a^4cc : 4 + a^3b^3 : 27$. Et quoniam, per extractionem quadratæ radicis, eruitur $y^3 - aac:2 = \sqrt{(a^4cc : 4 + a^3b^3 : 27)}$; fiet demum $y^3 = aac : 2 + \sqrt{(a^4cc:4 + a^3b^3:27)}$.

Quemadmodum autem abunde liquet, deficere in æquatione iſta, tam ſecundum, quam tertium terminum; ita nec etiam dubitari poteſt, quin ad eam reduci queat æquatio propoſita $x^3 + abx - aac = 0$. Eſt enim ex hypotheſi $x = y + z$; eſtque etiam $z = -ab : 3y$. Quare erit $x = y - ab : 3y$: & propterea cognito valore, quem habet inco-

gnita y in æquatione $y^3 = aac : 2 + \surd(a^4cc : 4 + a^3b^3 : 27)$, innoteſcet quoque valor, quem habet incognita alia x in æquatione principali $x^3 + abx - aac = 0$.

IV. *Quorſum reducatur conſtructio problematum tertii generis, quorum æquationes unicum valorem realem admittunt.*

IV. Et ſane, quin hujuſmodi reductio recte procedat, quum æquatio problematis induit hanc formam $x^3 + abx - aac = 0$, non eſt dubitandum. Tunc enim incognita x unicum valorem realem, eumque poſitivum admittit: quem ſemper determinare licebit, adhibita æquatione $y^3 = aac : 2 + \surd(a^4cc : 4 + a^3b^3 : 27)$; quum nihil impedimento eſſe poſſit inventioni ejus. Et par eſt ratio, ſi æquatio problematis accipiat hanc aliam formam $x^3 + abx + aac = 0$, ubi etiam incognita x unicum valorem realem, eumque negativum admittit.

Sed non perinde res eſt, ſi æquatio problematis ſit hujus formæ $x^3 - abx + aac = 0$. Nam in hoc caſu procedit reductio tunc tantum, quum incognita x unico valore reali, eoque negativo poteſt explicari; & deprehenditur omnino impoſſibilis, quotieſcumque, præter valorem illum negativum, alios duos poſitivos admittit. Nec aliter ſe res habet, ſi æquatio fuerit $x^3 - abx - aac = 0$, ubi etiam incognita x, præter valorem unum poſitivum, poteſt quandoque duobus aliis negativis pariter explicari.

Ut autem id liquido conſtet, meminiſſe oportet ejus, quod in Algebra demonſtratur: nimirum in duabus hiſce æquationibus $x^3 - abx + aac = 0$, & $x^3 - abx - aac = 0$, admittere incognitam x unicum tantum valorem realem, quum cubus ex triente coefficien-

ficientis tertii termini minor eſt quadrato, quod ſit ex ultimo termino dimidiato, hoc eſt quum $a^3b^3 : 27$ minor eſt, quam $a^4cc : 4$; explicari vero tribus valoribus realibus, quum viciſſim $a^3b^3 : 27$ major eſt, quam $a^4cc : 4$.

Jam, quotieſcumque habetur $x^3 - abx + aac = 0$, tunc æquatio reducta eſt $y^3 = aac : 2 + \sqrt{(a^4cc : 4 - a^3b^3 : 27)}$. Unde, quemadmodum in iſta valor incognitæ y tunc tantum oritur realis, quum $a^3b^3 : 27$ minor eſt, quam $a^4cc : 4$; ſic etiam in æquatione principali $x^3 - aax + aac = 0$ tunc tantum, adhibita ejus reducta, reperire licebit valorem incognitæ x, quum fuerit $a^3b^3 : 27$ minor, quam $a^4cc : 4$, hoc eſt quum ipſa incognita x unicum valorem realem admittit.

Et ſimiliter, quum æquatio problematis eſt $x^3 - abx - aac = 0$, tunc æquatio reducta eſt $y^3 = -aac : 2 + \sqrt{(a^4cc : 4 - a^3b^3 : 27)}$. Unde adhuc, ſicuti in iſta valor incognitæ y tunc demum realis deprehenditur, quum $a^3b^3 : 27$ minor eſt, quam $a^4cc : 4$; ſic pariter in æquatione principali $x^3 - abx - aac = 0$ tunc demum, mediante ejus reducta, determinari poterit valor incognitæ x, quum fuerit $a^3b^3 : 27$ minor, quam $a^4cc : 4$, hoc eſt, quum ipſa incognita x unico tantum valore reali poteſt explicari.

Id quum ita ſit, liquet, *per inventionem duarum mediarum proportionalium, ea ſola problemata tertii generis conſtrui poſſe, quorum æquationes unicum tantum valorem realem admittunt*; quum in ſolis hiſce æquatio-

nibus reductio rite procedat. Sed ſuperſunt problemata illa, in quorum æquationibus tres valores reales occurrunt. Unde, quorſum iſtorum conſtructiones reducendæ ſint, nunc oportet oſtendamus.

V. *Quorſum reducatur conſtructio problematum tertii generis, in quorum æquationibus tres valores reales occurrunt.*

V. Et quidem *conſtructiones problematum tertii generis, in quorum æquationibus tres valores reales occurrunt*, *per dati cujuſdam arcus triſectionem commode paragi poſſunt*. Nam, ſi oporteat, datum aliquem arcum tripartito dividere; invenietur æquatio cubica, cujus omnes radices erunt reales. Quod ut liquido conſtet, detur circulus ADE, cujus centrum ſit punctum F; & aſſumpta in ejus circumferentia portione quavis AD, ſecanda ſit ea in tres partes æquales.

Fig. 121.

Ponatur jam factum, quod quæritur, ſintque AB, BC, CD partes quæſitæ. Ducantur radii AF, BF, CF, DF; & junctis chordis AB, BC, CD, agatur per punctum B recta BG, parallela ipſi CF, quæ conveniat cum chorda arcus dati AD in puncto G; ponaturque radius dati circuli AF$=r$, chorda arcus ſimiliter dati AD $=p$, & chorda arcus quæſiti AB $=x$.

Itaque, quia angulus BFD duplus eſt, tam anguli BAD, quam anguli BFA; erunt duo anguli BAD, BFA æquales inter ſe; adeoque, ob triangula æquiangula BFA, BAH, erit, ut AF ad AB, ita AB ad BH. Et quoniam, propter parallelas BG, CF angulus GBF æqualis eſt angulo BFC, ſive BFA; erit idem angulus GBF æqualis quoque angulo BAD; & conſequenter, ob triangula

Digitized by Google

gula æquiangula ABH, BGH, erit, ut AB ad BH, ita BH ad HG. Hinc quatuor rectæ AF, AB, BH, HG continue proportionales erunt: & propterea erit BH $= xx : r$, & HG $= x^3 : rr$.

Ulterius, quum triangula duo BFA, BAH oſtenſa ſint æquiangula, & trianguli BFA æqualia ſint latera AF, BF; erunt quoque trianguli BAH æqualia latera AB, AH. Unde, quum eadem ratione oſtendantur etiam æqualia latera CD, DK trianguli CDK; erit AD una cum GH æqualis tribus AB, BC, CD ſimul ſumptis, ſive etiam triplo unius AB. Quare, inſtituta æqualitate inter valores iſtarum linearum, fiet $p + x^3 : rr = 3x$, hoc eſt $x^3 - 3rrx + prr = 0$, quæ eſt ejuſdem formæ cum æquatione $x^3 - abx + aac = 0$.

Jam vero, quod in iſta æquatione $x^3 - 3rrx + prr = 0$ radices omnes ſint reales, facile erit oſtendere. Quum enim AD ſit linea in circulo inſcripta, ea diametro AL æqualis quidem eſſe poteſt, major autem eſſe non poteſt. Itaque, omiſſo caſu æqualitatis, veluti ſpeciali, AL major eſt, quam AD: proindeque, quum ſit AL $= 2r$, & AD $= p$; erit $2r$ major, quam p; adeoque r major, quam $p : 2$. Eſt igitur in æquatione $x^3 - 3rrx + prr = 0$ cubus ex triente coefficientis tertii termini major quadrato, quod ſit ex ultimo termino dimidiato; & idcirco erunt in ea tres radices reales.

VI. Sed non ita liquido patet, *per quas rectas in ſchemate tres illæ radices reales exhibentur*. Eæ igitur habebuntur, ſi ſecetur in *VI. Æquationis, ad quam reducitur problema de tri-*

 tres

Digitized by Google

ſectione arcus, tres radices reales exhibentur.

FIG. 121.

tres partes æquales, tam arcus DMA, qui eſt complementum ad circulum ipſius ABD, quam arcus DIL, qui eſt complementum ad ſemicirculum ejuſdem ABD. Si enim DM, MN, NA ſint partes arcus prioris DMA, & DO, OI, IL ſint partes arcus alterius DIL; deſignabit recta AB radicem unam, recta AN radicem alteram, & recta AI radicem tertiam. Quumque ex tribus radicibus æquationis $x^3 - 3rrx + prr = 0$ duæ quidem ſint poſitivæ, & una negativa; erunt rectæ AB, AN radices poſitivæ, & recta AI radix negativa.

Et quidem, rectam AN eſſe radicem æquationis $x^3 - 3rrx + prr = 0$ perinde, ac eſt recta AB, facili negotio ſuaderi poteſt; quia quotieſcumque trifariam ſecandus proponitur arcus AD, poteſt hic eſſe tam arcus ABD, quam arcus AND; quum uterque iſtorum punctis A, & D terminetur. Sed, quod ejuſdem æquationis radix ſit etiam recta AI, quæ nec ſubtendit trientem arcus ABD, nec trientem arcus AND: id equidem non ita facile concipitur; quia, quam relationem habeat recta AI cum problemate de trisectione arcus AD, ſane non apparet.

Conſtabit id autem, ſi ſedulo conſideremus, quo pacto procedimus in reſolutione problematis, in quo arcus, duobus datis punctis interceptus, in certum æqualium partium numerum dividendus proponitur. Nimirum, quum in reſolutione ejus problematis procedamus, inveniendo valorem chordæ, quæ unam ex iis partibus ſubtendat; perſpicuum eſt, problema ipſum eo quidem redire, ut

in-

inveniatur valor rectæ lineæ, quæ incipiendo ab uno puncto, toties aptari poſſit in circuli circumferentia, donec perveniatur ad punctum alterum, quot ſunt partes, in quas dividere oportet arcum, qui inter duo illa puncta intercipitur.

Atque hac ratione facile modo intelligimus, cur æquatio $x^3 - 3rrx + prr = o$ tres habeat radices reales, deſignatas per rectas AB, AN, AI. Orta eſt namque æquatio illa ex reſolutione problematis, in quo arcus, punctis A, & D interceptus, in tres partes æquales proponitur dividendus. Itaque, ut illi æquationi ſatisfiat, rectam oportet invenire, quæ a puncto A ter aptari queat in circumferentia circuli, donec ad punctum alterum D perveniatur. Unde, quum id præſtari poſſit per quamlibet rectarum AB, AN, AI; conſequens eſt, ut valor incognitæ x in æquatione $x^3 - 3rxx + prr = o$ ſit unaquæque rectarum AB, AN, AI.

VII. *Quæ ſint ejuſdem æquationis radices duæ poſitivæ, & quæ radix negativa, aperitur.* FIG. 121.

VII. Ne aliquid hic omittamus, *illud etiam oſtendendum nobis eſt*, quod in eadem æquatione $x^3 - 3rrx + prr = o$ referant radices poſitivas rectæ AB, AN, & deſignet radicem negativam recta AI. Id autem facile conſtabit, ſi utique oſtendi poſſit, rectam AI ipſis AB, AN ſimul ſumptis æqualem eſſe. Deeſt enim in æquatione illa ſecundus terminus; adeoque, per ea, quæ in Algebra demonſtrantur, debet radix negativa ejuſmodi eſſe, ut adæquet ſummam ex duabus radicibus poſitivis.

Oſtendemus vero rectam AI æqualem

Digitized by Google

ſummæ ipſarum AB, AN, præmiſſo prius hoc lemmate. Nimirum, quod ſi in circulo aliquo
FIG. 122. ABC deſcribatur triangulum æquilaterum BCD, & ex uno trianguli angulo, veluti C, ducatur recta AB, quæ terminata ad circuli circumferentiam, ſecet latus oppoſitum BD in puncto E; quod, inquam, recta iſta CA ipſis AB, AD ſimul ſumptis ſit æqualis.

Hujus lemmatis veritas oſtendi poteſt in hunc modum. Angulus DAC, velut æqualis angulo DBC, adæquat angulum BDC. Itaque duo triangula CDE, CAD æquiangula erunt; adeoque erit, ut CD ad DE, ita CA ad AD. Eadem ratione angulus BAC, velut æqualis angulo BDC, adæquat angulum DBC. Itaque duo triangula CBE, CAB æquiangula erunt; adeoque erit, ut CB ad BE, ita CA ad AB.

Jam, propter triangulum æquilaterum BCD, duæ CB, CD inter ſe ſunt æquales. Quare erit quoque, ut CD ad BE, ita CA ad AB. Sed oſtenſum eſt pariter, quod CD ſit ad DE, ut CA ad AD. Itaque erit, ut CD ad ſummam ipſarum BE, DE, ita CA ad ſummam ipſarum AB, AD. Unde, quemadmodum CD ipſis BE, DE ſimul ſumptis eſt æqualis; ita CA ipſas AB, AD ſimul adæquabit.

Hoc lemmate præmiſſo, facile modo erit, oſtendere, rectam AI ipſis AB, AN ſimul
FIG. 121. ſumptis æqualem eſſe. Quum enim arcus AB ſit tertia pars arcus ABD, & arcus AN tertia pars arcus AND; erit arcus BAN tertia pars totius circumferentiæ. Et rurſus, quoniam arcus BD continet duas tertias partes arcus

ABD,

ABD, & arcus DI duas tertias partes arcus DIL; continebit arcus BDI duas tertias partes ſemicircumferentiæ ADL; adeoque tertia pars erit circumferentiæ integræ.

Hinc arcus BAN, BDI, non modo æquales erunt inter ſe, verum etiam adæquabunt arcum reliquum IMN. Unde, ſi puncta tria B, I, N rectis totidem jungantur, æquilaterum erit triangulum, ſub iis comprehenſum: & conſequenter, per lemma jam oſtenſum, recta AI ipſis AB, AN ſimul ſumptis æqualis eſſe debebit.

VIII. Quemadmodum ergo in problemate de triſectione arcus AD invenitur æquatio $x^3 - 3rrx + prr = a$, cujus omnes radices ſunt reales; ita nulli dubium eſſe poteſt, quin referant radices duas poſitivas rectæ AB, AN, & radicem negativam recta AI. Sed, *qua ratione, per triſectionem alicujus arcus, conſtrui poſſint problemata omnia tertii generis, in quorum æquationibus tres valores reales occurrunt*, jam ſupereſt, ut oſtendamus.

VIII. *Quomodo per triſectionem alicujus arcus conſtrui poſſint problemata tertii generis, quorum æquationes tres radices reales admittunt.*

Sit itaque primo $x^3 - abx + aac = 0$ æquatio problematis, quæ duas admittit radices poſitivas, & unam negativam. Conferatur æquatio iſta cum ea de triſectione arcus, ſuperius inventa, $x^3 - 3rrx + prr = 0$. Et, comparatione inſtituta, habebitur $3rr = ab$, & $prr = aac$. Unde, quemadmodum ex prima harum æquationum infertur $r = \surd(ab:3)$, ſic ex ſecunda eruitur $p = 3ac:b$. FIG. 121.

Jam in problemate de triſectione arcus erat r radius circuli, & p chorda arcus triſecandi. Quare, ſi deſcribatur circulus ABL,

cujus radius ſit $\surd(ab:3)$, & in eo aptetur recta $AD = 3ac:b$; erunt propoſitæ æquationis radices poſitivæ rectæ AB, AN, quæ ſubtendunt trientes arcuum ABD, AND; & radix negativa recta AI, quæ ſubtendit trientem arcus ABDNABD.

Sit ſecundo $x^3 - abx - aac = 0$ æquatio problematis, in qua ſunt duæ radices negativæ, & una poſitiva. Jam iſta a præcedente non in alio differt, quam quod terminorum, locis paribus exiſtentium, mutata ſint ſigna. Quare per ea, quæ in Algebra oſtenduntur, erunt iſtius radices negativæ, quæ in illa erant poſitivæ; & per contrarium erit hujus radix poſitiva, quæ illic erat negativa.

Hinc, deſcripto rurſus circulo ABL, cujus radius ſit $\surd(ab:3)$, & aptata adhuc in eo recta $AD = 3ac:b$; oportebit, tripartito dividere, non modo arcus ABD, AND, verum etiam arcum ABDNABD. Nam erunt propoſitæ æquationis radices negativæ rectæ AB, AN, quæ ſubtendunt trientes arcuum ABD, AND; & erit radix poſitiva recta AI, quæ ſubtendit trientem arcus ABDNABD.

IX. *Ad quod problema, tum arcus triſectio, cum inventio duarum mediarum proportionalium poſſit revocari.*

IX. Omnia igitur problemata ſolida, vel inventione duarum mediarum proportionalium inter duas rectas datas, vel triſectione arcus alicujus conſtruere licebit. Sed nolo hic ſilentio reticere, quod *utrumque horum problematum nullo negotio conſtruatur, ſi utique intra datum angulum, ſive rectilineum ſive mixtilineum, aptari poſſit recta datæ longitudinis, quæ convergat ad punctum datum.*

Oporteat etenim primo invenire duas

me-

medias proportionales inter rectas AB, AC. Fig. 123.
Jungatur ex ad rectos angulos; & completo rectangulo AC ſecetur utraque ipſarum bifariam in E, & F. Tum, juncta DE, producatur eadem, uſque donec ipſi BC occurrat in G; & erecta ſuper BC perpendiculari FH talis longitudinis, ut fiat CH æqualis ipſi AE, jungatur GH, cui per punctum C parallela agatur CI. Extendatur poſtea BC verſus K, & intra angulum rectilineum KCI aptetur recta KI, eidem AE æqualis, quæ convergat ad punctum H. Denique per punctum D ducatur recta KL, ipſi AB occurrens in L; & dico, CK, AL medias eſſe proportionales inter duas AB, AC.

Quum enim AB ſecta ſit bifariam in E; erit BG ipſi AD, ſeu BC æqualis; adeoque erit, ut AE ad AB, ita BC ad CG. Sed AB eſt ad AL, ut CK ad BC. Quare, perturbando, erit, ut AE ad AL, ita CK ad CG; & addendo antecedentes conſequentibus, erit etiam, ut AE ad EL, ita CK ad GK. Unde, quum CK ſit ad GK, ut eſt KI ad KH; erit ex æquali, ut AE ad EL, ita KI ad KH: & propterea, ob æquales AE, KI, erunt etiam æquales EL, KH: proindeque erit quadratum ex EL æquale quadrato ex KH.

Jam quadratum ex EL eſt æquale rectangulo ALB una cum AE quadrato; & quadratum ex KH eſt æquale quadratis KF, FH, ſive etiam rectangulo BKC una cum CH quadrato. Quare erit rectangulum ALB una cum AE quadrato æquale rectangulo BKC una cum CH quadrato; adeoque, ablatis æqua-

qualibus quadratis AE; CH, erit rectangulum ALB æquale rectangulo BKC. Unde erit, ut BL ad BK, ita CK ad AL. Sed BL eſt ad BK, ut AB ad CK, & ut AL ad BC. Et igitur ex æquali erit, ut AB ad CK, ita CK ad AL, & ita AL ad BC.

Fig. 124. Oporteat ſecundo, ſecare trifariam arcum AB, ſumptum in circumferentia circuli ABD, cujus centrum eſt punctum C. Extendatur diameter AD verſus E, & intra angulum mixtilineum EDF aptetur recta EF æqualis radio CA, quæ convergat ad punctum B. Agatur poſtea per centrum C recta CG, ipſi EF parallela; & erit AG tertia pars arcus AB. Nam, ob æquales CB, CF, EF, iſoſcelia erunt triangula BCF, CFE; adeoque erit angulus ACB triplus anguli AEB, ſive ACG.

X. *Quomodo præfatum problema ſolvebat Nichomedes Conchoide ſua, & num legitima ſit illa ſolutio.*

X. Non ergo dubitari poteſt, quin facili negotio reſolvatur, tam problema de duabus mediis proportionalibus; quam problema de anguli triſectione, ubi aptari poſſit intra datum angulum, ſive rectilineum, ſive mixtilineum recta datæ longitudinis, quæ convergat ad punctum datum. Præſtabat id autem Nichomedes ſua *conchoide*. Si enim ſuper recta poſitione data AB feratur centrum circuli DEF interea, ac recta CH, tranſiens per centrum illud, revolvitur circa G; continua rectæ hujus, & circuli interſectione deſcribetur conchois Nichomedis XMZ.

Fig. 125.

Jam curvæ hujus illud eſt accidens præcipuum, ut ducta ad eam ex puncto C recta quavis CM, ſit æqualis radio circuli DEF portio ejus MO, quæ recta AB, & curva ipſa con-

ci-

Digitized by Google

tinetur. Unde, ſi AB ſit crus rectilineum anguli dati, C punctum, ad quod convergere debet recta, intra angulum applicanda, & radius circuli DEF longitudo ejuſdem rectæ; ſolvetur problema, faciendo, ut recta convergat quoque ad punctum illud, in quo aliud anguli crus a conchoide ſecatur.

Obiter autem notetur hic velim, quod ſicuti curva XMZ conchois appellatur; ſic dicitur polus ejus punctum C, regula recta AB, & intervallum radius circuli DEF, quo mediante deſcribitur. Regula porro eſt etiam aſymptotus curvæ. Nam, ſi ſuper ea ex quolibet curvæ puncto M perpendicularis demittatur MN; fiet iſta eo minor, quo magis a polo receditur, nec tamen unquam evaneſcet. Unde, curva ipſa accedet quidem continuo ad rectam AB, ei tamen numquam occurret.

Cæterum conchois eſt curva tertii generis. Nam, demiſſo ſuper AB perpendiculo CA, poſitiſque CA $= a$, MO $= b$, AN $= x$, & MN $= y$; invenietur æquatio quarti gradus $xxyy + y^4 + 2ay^3 + aayy - bbyy - 2abby - aabb = 0$. Unde, etſi problema de applicanda intra datum angulum recta datæ longitudinis, quæ convergat ad punctum datum, ſit ſolidum natura ſua; eſt tamen legitima conſtructio ejus, quæ conchoide perficitur, quum ſit ad rectam locus alter, qui cum conchoide conjungitur.

FINIS.

IN-

605713
SBN

Digitized by Google

INDEX
LIBRORUM, ET CAPITUM,

Quæ in hoc Secundo Tomo continentur.

LIBER V.

De Tangentibus, & Secantibus Sectionum Conicarum.

CAP. I. *Proprietates, quæ ellipſis tangentibus competunt, oſtenduntur.* 3
CAP. II. *Proprietates, quæ ſecantibus ellipſis competunt, oſtenduntur.* 16
CAP. III. *Demonſtrantur proprietates, quæ competunt tangentibus hyperbolæ.* 27
CAP. IV. *Demonſtrantur proprietates, quæ competunt ſecantibus hyperbolæ.* 41
CAP. V. *Proprietates, quæ hyperbolæ aſymptotis competunt, in medium afferuntur.* 54
CAP. VI. *Proprietates, quæ parabolæ tangentibus, & ſecantibus competunt, oſtenduntur.* 67

LI-

Digitized by Google

LIBER VI.

De Focis, ſeu Umbilicis Sectionum Conicarum.

CAP.I. *Focorum ellipſis proprietates generales oſtenduntur.* 78

CAP.II. *Focorum ellipſis proprietates ſpeciales oſtenduntur.* 92

CAP.III. *Demonſtrantur focorum hyperbolæ proprietates generales.* 102

CAP.IV. *Demonſtrantur proprietates ſpeciales focorum hyperbolæ.* 116

CAP.V. *Oſtenduntur proprietates generales, ad parabolæ focum pertinentes.* 126

CAP.VI. *Oſtenduntur proprietates ſpeciales, ad parabolæ focum pertinentes.* 135

LIBER VII.

De Locis Geometricis, Coni Sectionibus terminatis.

CAP.I. *Quid loci geometrici nomine veniat, & quot ejus ſpecies diſtinguantur.* 144

CAP.II. *De diviſione locorum ad lineam, & quomodo ea conſtrui poſſint.* 160

CAP.

Digitized by Google

CAP.III. *Qua ratione loca ad parabolam conſtrui poſſint, oſtenditur.* 177
CAP.IV. *Ratio conſtruendi loca ad ellipſim, & circulum aperitur.* 195
CAP.V. *De conſtructione locorum ad hyperbolam, relate ad diametros conſideratam.* 216
CAP.VI. *De conſtructione locorum ad hyperbolam, relate ad aſymptotos conſideratam.* 238

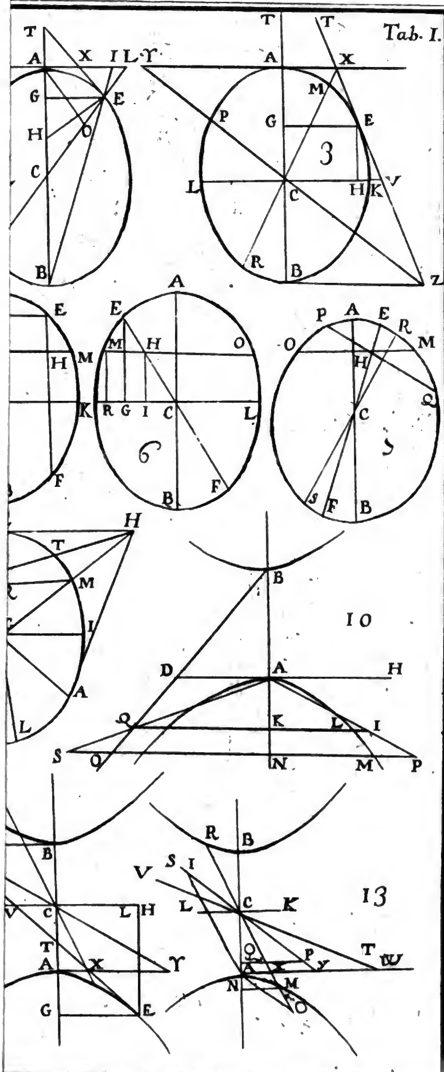
LIBER VIII.

De Conſtructione Problematum Solidorum.

CAP.I. *Ratio conſtruendi problemata geometrica generatim explicatur.* 259
CAP.II. *Ratio conſtruendi problemata plana in medium affertur.* 277
CAP.III. *Methodus conſtruendi problemata ſolida generatim oſtenditur.* 295
CAP.IV. *Elegantiores problematum ſolidorum conſtructiones exhibentur.* 313
CAP.V. *Conſtructio problematum ſolidorum plenius expenditur.* 332

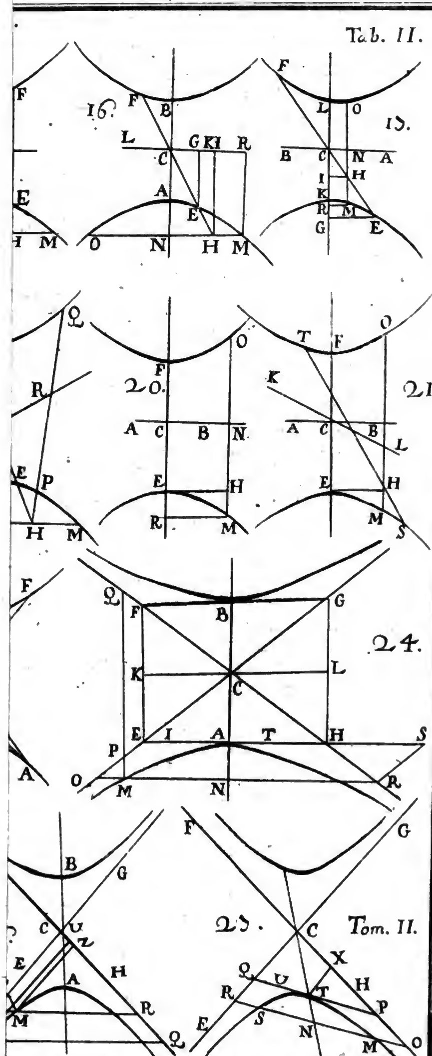
Digitized by Google

Tab. I.



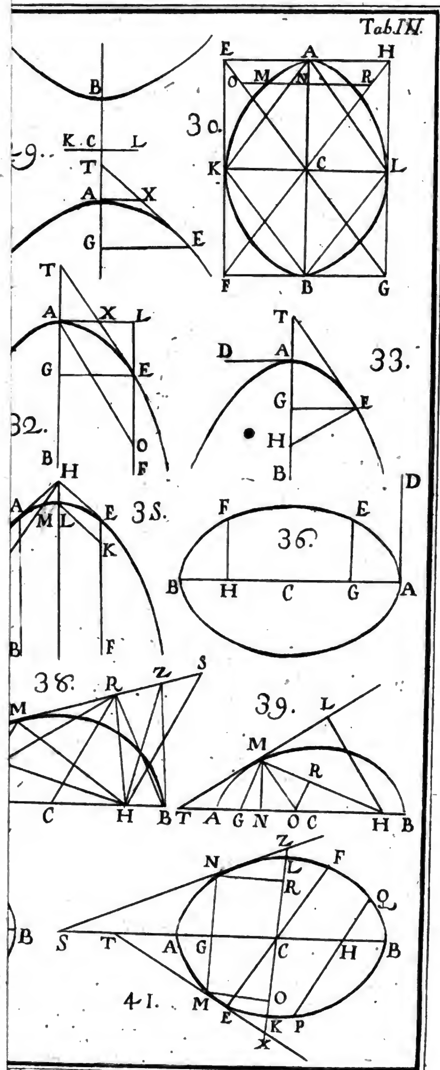
Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

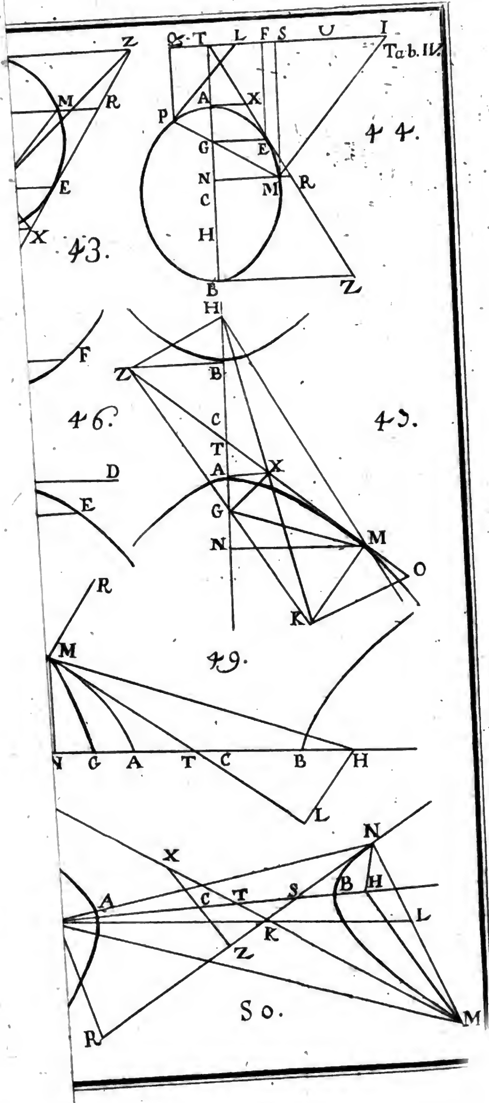
Digitized by Google



Digitized by Google

NAPOLI

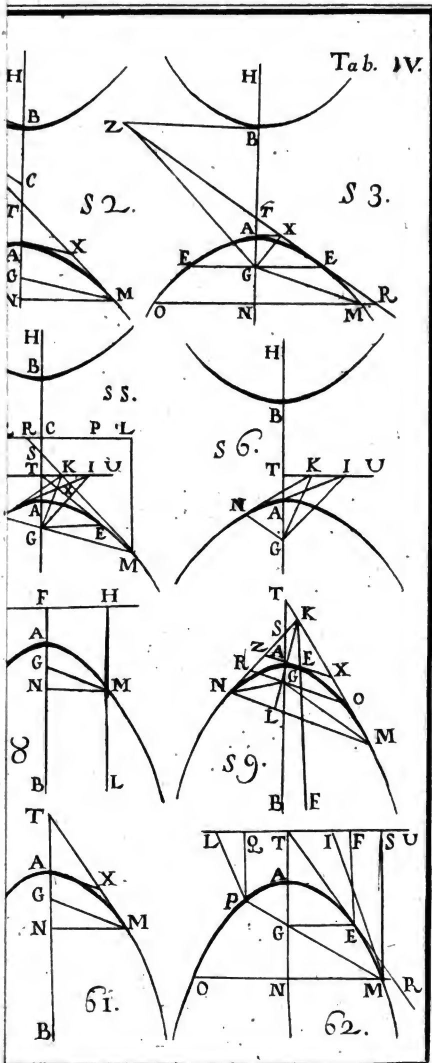
Digitized by Google



Google

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

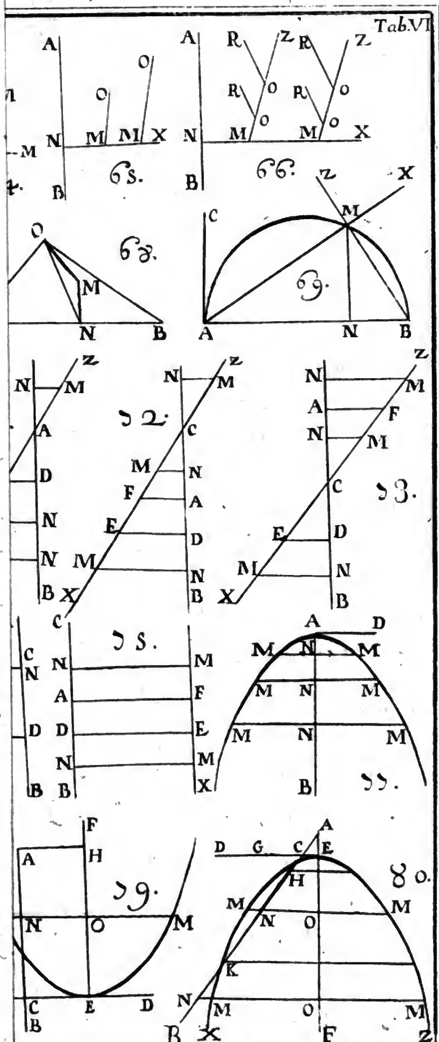
Digitized by Google



Digitized by Google

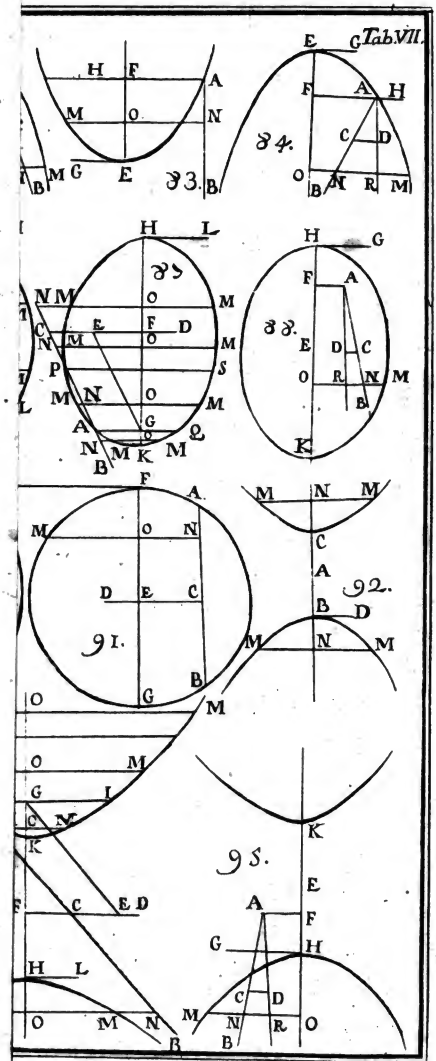
BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

Digitized by Google



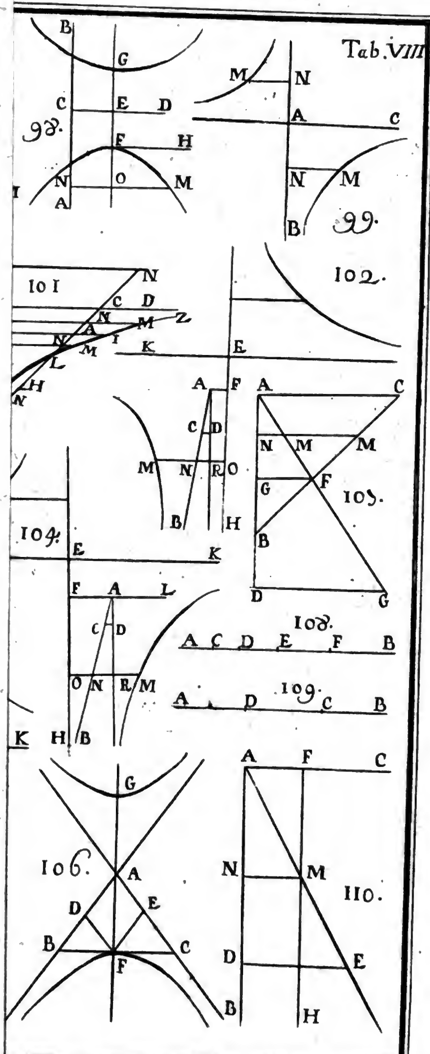
Digitized by Google

Digitized by Google



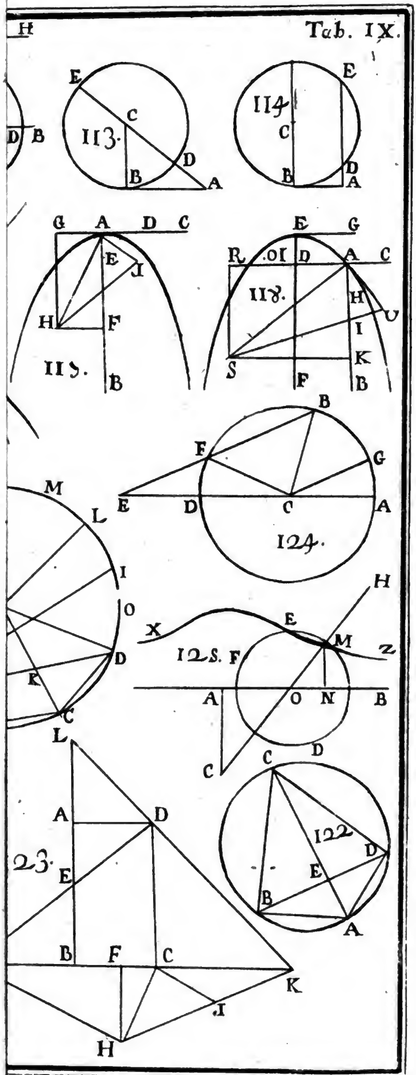
Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI
Digitized by Google


Tab. IX.
113.
114
115.
118.
124.
125.
122
23.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google